ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ВЕКТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ
МЕРА ХААРА
СВЕРТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ВЕКТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ
МЕРА ХААРА
СВЕРТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

N. BOURBAKI FASCICULE XXV

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

LIVRE VI

INTÉGRATION

HERMANN

115, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS VI

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ВЕКТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ
МЕРА ХААРА
СВЕРТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Е. И. СТЕЧКИНОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д. А. РАЙКОВА и С. Б. СТЕЧКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
Б 91
УДК 517.397

Н. Бурбаки

Интегрирование
Векторное интегрирование. Мера Хаара.
Свертка и представления

М., 1970 г., 320 стр. с илл.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректоры *С. Н. Емельянова, Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 15/IX 1969 г. Подписано к печати 5/VIII 1970 г. Бумага 60×90/16.
Физ. печ. л. 20+3 вкл. Усл. печ. л. 20,75. Уч.-изд. л. 19,20 Тираж 35 000 экз.
Цена книги 1 р. 63 к. Заказ 42

Издательство «Наука»
Главная редакция
Физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

2-2-3
24-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА VI

ВЕКТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В этой главе, если F — отделимое локально выпуклое пространство (над полем **R** *или* **C**), *то через F' обозначается его сопряженное, через F'' — его второе сопряженное, а через F'^* — алгебраическое сопряженное к F' (пространство всех линейных форм на F'); F'' есть векторное подпространство пространства F'^*, и F отождествляется (как векторное пространство без топологии) с некоторым векторным подпространством пространства F''. Через F_σ обозначается векторное пространство F, наделенное ослабленной топологией $\sigma(F, F')$; к этой топологии относятся эпитеты «слабый» и «слабо».*

В этой главе T означает локально компактное пространство, $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(T)$ *или* $\mathscr{K}(T)$ (соотв. $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$) — *векторное пространство действительных* (соотв. *комплексных*) *непрерывных функций на T с компактным носителем; для любого множества A из T через* $\mathscr{K}(T, A)$ (соотв. $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T, A)$) *обозначается подпространство пространства* $\mathscr{K}(T)$ (соотв. $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$), *образованное теми функциями, носитель которых содержится в A. Всюду, где не оговорено противное, пространство* $\mathscr{K}(T)$ (соотв. $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$) *будет наделяться индуктивным пределом топологий равномерной сходимости в каждом из подпространств* $\mathscr{K}(T, K)$ (соотв. $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T, K)$), *где K пробегает все компактные подмножества из T.*

Напомним, что эта топология мажорирует топологию равномерной сходимости и, стало быть, отделима; она индуцирует в каждом из $\mathscr{K}(T, K)$ (соотв. $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T, K)$) топологию равномерной сходимости (Топ. вект. простр., гл. II, § 2, n°4, замечание 3). Пространство $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$ отождествляется с пространством, получаемым из $\mathscr{K}(T)$ путем расширения поля скаляров от **R** до **C**. Утверждение, что линейная форма на $\mathscr{K}(T)$ есть *мера*, означает, что она *непрерывна* (Топ. вект. простр., гл. II, § 2, n° 4).

§ 1. Интегрирование вектор-функций

В этом параграфе μ означает положительную меру на T, а F — отделимое локально выпуклое векторное пространство над $\mathbf{R}$. Для любого отображения f пространства T в F и любого элемента z' пространства F', сопряженного к F, через $\langle f, z' \rangle$ или $\langle z', f \rangle$ обозначается числовая функция $z' \circ f$ на T. Мы говорим, что f обладает *скалярно* свойством P, если $\langle z', f \rangle$ обладает свойством P для любого $z' \in F'$. Например, f называется *скалярно существенно μ-интегрируемым*, если для любого $z' \in F'$ функция $\langle z', f \rangle$ существенно μ-интегрируема.

Отметим, что в этом определении топология пространства F участвует лишь через посредство сопряженного к F пространства F'. Функция f, обладающая скалярно свойством P, будет им обладать скалярно и при замене топологии пространства F любой отделимой локально выпуклой топологией, согласующейся с двойственностью между F и F'.

1. *Скалярно существенно интегрируемые функции*

Если f — скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в F, то отображение $z' \mapsto \int \langle f(t), z' \rangle \, d\mu(t)$ есть линейная форма на F', то есть элемент алгебраического сопряженного F'^* к F'.

Определение 1. Интегралом от f относительно μ *называется, и обозначается через* $\int f \, d\mu$ *или* $\int f(t) \, d\mu(t)$, *элемент пространства* F'^*, *определяемый равенством*

$$\langle z', \int f \, d\mu \rangle = \int \langle z', f \rangle \, d\mu$$

для всех $z' \in F'$.

Если — непрерывная вектор-функция с компактным носителем, то она скалярно интегрируема и определение 1 совпадает с определением интеграла от f, данным в главе III, § 4, n° 1. С другой стороны, если F — банахово пространство и f существенно интегрируема (гл. V, § 2, определение 2), то f скалярно существенно интегрируема и определение 1 совпадает с определением

интеграла от f, данным в главе V, § 2, n° 2 (гл. V, § 2, предложение 6 и гл. IV, § 4, следствие 1 теоремы 1).

Пример. Пусть X — локально компактное пространство и $t \longmapsto \lambda_t$ — отображение пространства T в пространство $\mathfrak{M}(X)$ мер на X. Утверждение, что семейство $t \longmapsto \lambda_t$ μ-согласовано (гл. V, § 3, определение 1), означает, что оно образовано положительными мерами и отображение $t \longmapsto \lambda_t$ скалярно существенно μ-интегрируемо и μ-измеримо в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(X), \mathcal{K}(X))$. Его интеграл относительно μ есть мера, которая в главе V, § 3, n° 1 обозначалась через $\int \lambda_t \, d\mu(t)$.

Замечания. 1) Если F конечномерно, то всякое скалярно существенно интегрируемое отображение пространства T в F существенно интегрируемо (гл. V, § 2, n° 2). Напротив, в общем случае скалярно пренебрежимая функция на компактном пространстве T может даже не быть μ-измеримой (упражнение 12).

2) Ясно, что интеграл от f зависит лишь от класса f по модулю пространства скалярно локально μ-пренебрежимых отображений T в F. Отметим, что скалярно локально пренебрежимая функция g не обязана обращаться в нуль локально почти всюду (упражнение 12). Однако это будет так, если в F' существует последовательность (z'_n), всюду плотная в топологии $\sigma(F', F)$: действительно, пусть H_n — локально пренебрежимое множество тех точек $t \in T$, в которых $\langle g(t), z'_n \rangle \neq 0$; тогда объединение H множеств H_n локально пренебрежимо и для любого $t \notin H$ при всех n выполняется равенство $\langle g(t), z'_n \rangle = 0$, откуда $g(t) = 0$.

Пусть u — *непрерывное* линейное отображение пространства F в отделимое локально выпуклое пространство G; его сопряженное ${}^t u$ есть линейное отображение G' в F', а (алгебраическое) сопряженное ${}^t({}^t u)$ есть линейное отображение F'^* в G'^*, являющееся продолжением u; мы будем снова обозначать его через u. При этом соглашении справедливо

Предложение 1. *Если f есть скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в F, то отображение $u \circ f$ скалярно существенно μ-интегрируемо и*

$$\int (u \circ f)\, d\mu = u\left(\int f\, d\mu\right).$$

Действительно, при любом $z' \in G'$ имеем $\langle z', u \circ f \rangle = \langle {}^t u(z'), f \rangle$, откуда вытекает первое утверждение; второе следует из формулы

$$\left\langle z', \int (u \circ f)\, d\mu \right\rangle = \int \langle z', u \circ f \rangle\, d\mu = \left\langle {}^t u(z'), \int f\, d\mu \right\rangle = \\ = \left\langle z', u\left(\int f\, d\mu\right)\right\rangle.$$

В частности, скалярно существенно μ-интегрируемое отображение f остается скалярно существенно μ-интегрируемым при замене топологии пространства F менее сильной топологией.

Предложение 2. *Пусть f — скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в F. Для любой ограниченной μ-измеримой числовой функции $g \geqslant 0$ отображение $t \longmapsto g(t) f(t)$ пространства T в F (обозначаемое gf или fg) скалярно существенно μ-интегрируемо, f скалярно существенно $(g\mu)$-интегрируемо и $\int f\, d(g\mu) = \int fg\, d\mu$.*

Это — непосредственное следствие формулы $\langle z', gf \rangle = g \langle z', f \rangle$ для любого $z' \in F'$ и формулы $\int h\, d(g\mu) = \int hg\, d\mu$ для любой существенно μ-интегрируемой скалярной функции h (гл. V, § 5, теорема 1).

Многие предложения о существенно интегрируемых числовых функциях дословно переносятся на скалярно существенно интегрируемые вектор-функции. Среди наиболее важных укажем условия существенной интегрируемости функции относительно меры, определенной плотностью (гл. V, § 5, теорема 1), или относительно образа меры (гл. V, § 6, теорема 1), или относительно индуцированной меры (гл. V, § 7, теорема 1), или относительно суммы некоторого суммируемого семейства положительных мер (гл. V, § 3, предложение 5). Предоставляем читателю сформулировать соответствующие предложения.

Напротив, чтобы получить формулировки, соответствующие теоремам о «двойных» интегралах (гл. V, § 3, теорема 1 и § 8, теорема 1 (теорема Лебега — Фубини)), необходимо усилить условия (ср. упражнение 1); так, применив указанные теоремы к каждой из функций $\langle z', f \rangle$, где $z' \in F'$, получим следующие два предложения:

Предложение 3. *Пусть* X — *локально компактное пространство*, $t \mapsto \lambda_t$ — μ-*согласованное семейство* (гл. V, § 3, определение 1) *положительных мер на* X *и* $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. *Пусть, далее,* f — *отображение* X *в* F; *предположим, что*: 1° f *скалярно* ν-*интегрируемо*; 2° *существует такое локально* μ-*пренебрежимое множество* $N \in T$, *что для любого* $t \notin N$ *отображение* f *скалярно* λ_t-*интегрируемо и* $\int f \, d\lambda_t \in F$. *Тогда функция* $t \mapsto \int f \, d\lambda_t$, *определенная для* $t \notin N$, *скалярно существенно* μ-*интегрируема и*

$$\int f(x) \, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x) \, d\lambda_t(x).$$

Предложение 4. *Пусть* T *и* T' — *локально компактные пространства*, μ (соотв. μ') — *положительная мера на* T (соотв. T') *и* $\nu = \mu \otimes \mu'$ — *мера-произведение на* $X = T \times T'$. *Пусть, далее,* f — *отображение* X *в* F. *Предположим, что*: 1° f *скалярно* ν-*интегрируемо*; 2° *существует такое локально* μ-*пренебрежимое множество* $N \subset T$, *что при любом* $t \notin N$ *отображение* $t' \mapsto f(t, t')$ *скалярно* μ'-*интегрируемо и* $\int f(t, t') \, d\mu'(t') \in F$. *Тогда функция* $t \mapsto \int f(t, t') \, d\mu'(t')$, *определенная для* $t \notin N$, *скалярно существенно* μ-*интегрируема и*

$$\int \int f(t, t') \, d\mu(t) \, d\mu'(t') = \int d\mu(t) \int f(t, t') \, d\mu'(t').$$

2. Свойства интеграла от скалярно существенно интегрируемой функции

Предложение 5. *Пусть* μ — *ограниченная положительная мера на* T, S — μ-*измеримое множество, несущее* μ (гл. V, § 5, n° 7), *и* f — *скалярно* μ-*интегрируемая* *) *функция со значениями в* F. *Пусть, далее,* D — *замкнутая выпуклая оболочка множества* $f(S)$ *в пространстве* F'^*, *наделенном топологией* $\sigma(F'^*, F')$. *Тогда* $\int f \, d\mu \in \mu(T) D$.

---

*) Напомним, что для *ограниченной* положительной меры μ понятия μ-интегрируемой и существенно μ-интегрируемой функции совпадают (гл. V, § 2, следствие предложения 3).

Поскольку D является пересечением замкнутых полупространств, содержащих $f(S)$ (Топ. вект. простр., гл. II, § 3, следствие 1 предложения 4), достаточно доказать, что соотношение $\langle f(t),\ z'\rangle \leqslant a$ для всех $t \in S$ (где $z' \in F'$, $a \in \mathbf{R}$) влечет $\left\langle z',\ \int f\,d\mu \right\rangle \leqslant a\mu(T)$; но так как $\int f\,d\mu = \int\limits_S f\,d\mu$, то это вытекает из предложения 1 § 4 главы IV.

Следствие. *Пусть μ — ограниченная положительная мера на T, S — μ-измеримое множество, несущее μ, и f — отображение T в F, скалярно μ-измеримое и такое, что $f(S)$ содержится в некотором выпуклом слабо компактном множестве $A \subset F$. Тогда f скалярно μ-интегрируемо и $\int f\,d\mu \in \mu(T)\,A \subset F$.*

В самом деле, для любого $z' \in F'$ функция $\langle z',\ f\rangle$ μ-измерима и ограничена на S, а значит, интегрируема, чем доказано, что f скалярно интегрируема. Кроме того, A, будучи компактным в F_σ, замкнуто в F'^*, и замкнутая выпуклая оболочка множества $f(S)$ в F'^* содержится в A, что завершает доказательство следствия.

Предложение 6. *Пусть f — скалярно существенно μ-интегрируемая функция со значениями в F и $\int f\,d\mu \in F$. Для любой полунепрерывной снизу полунормы q на F имеем*

$$q\left(\int f\,d\mu\right) \leqslant \overline{\int}^{*} (q \circ f)\,d\mu.$$

Обозначим через D множество тех $z \in F$, для которых $q(z) \leqslant 1$; D замкнуто, выпукло и содержит 0, а значит, $D = D^{\circ\circ}$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, следствие 2 предложения 4). Следовательно, достаточно доказать, что для любого $z' \in D^{\circ}$ выполняется неравенство $\left|\langle z',\ \int f\,d\mu\rangle\right| \leqslant \overline{\int}^{*} (q \circ f)\,d\mu$; но это сразу вытекает из того, что $|\langle z',\ f(t)\rangle| \leqslant q(f(t))$ для любого $t \in T$.

Отметим, что числовая функция $q \circ f$ не обязана быть μ-измеримой (упражнение 12).

Предложение 7. *Пусть f — отображение T в F, скалярно существенно μ-интегрируемое и такое, что $f(K)$ для любого компактного множества K из T содержится в некотором слабо*

компактном уравновешенном выпуклом множестве из F. Тогда $\int f\,d\mu$ принадлежит второму сопряженному F'' к F.

Для любого компактного множества $K \subset T$ имеем

$$\int f\varphi_K\,d\mu = \int (f\varphi_K)\,d(\varphi_K\mu);$$

к ограниченной мере $\varphi_K\mu$ и функции $f\varphi_K$ применимо следствие предложения 5, так что $\int f\varphi_K\,d\mu \in F$. Так как $\langle z', f\rangle$ для любого $z' \in F$ существенно μ-интегрируема, то (гл. V, § 2, предложение 8) $\int \langle z', f\rangle\,d\mu = \lim\limits_K \int \langle z', f\rangle\,\varphi_K\,d\mu$, где предел берется по возрастающему фильтрующемуся множеству всех компактных подмножеств из T. Отсюда заключаем, что $\int f\varphi_K\,d\mu$ сходится по этому множеству к $\int f\,d\mu$ в топологии $\sigma(F'^*, F')$. Но

$$\left|\left\langle z', \int f\varphi_K\,d\mu\right\rangle\right| = \left|\int \langle z', f\rangle\,\varphi_K\,d\mu\right| \leqslant \int |\langle z', f\rangle|\,d\mu,$$

а это показывает, что множество элементов $\int f\varphi_K\,d\mu$ *ограничено* в F_σ, а значит, также в F (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, теорема 3). Поэтому предложение 7 вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Замыкание в F'^* (в топологии $\sigma(F'^*, F')$) всякого ограниченного множества из F содержится во втором сопряженном F''.*

В самом деле, ограниченное множество из F содержится в поляре (в F'') окрестности нуля сильного сопряженного F' к F и, стало быть, относительно компактно в F'' в топологии $\sigma(F'', F')$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, предложения 1 и 2); а поскольку $\sigma(F'', F')$ индуцирована топологией $\sigma(F'^*, F')$, то лемма доказана.

Следствие. *Предположим, что F полурефлексивно, и пусть f — скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в F, при котором $f(K)$ для любого компактного множества K из T ограничено. Тогда $\int f\,d\mu$ принадлежит F.*

Действительно, всякое ограниченное множество в F относительно слабо компактно (Топ. вект. простр., гл. IV, § 3, теорема 1) и $F = F''$.

Предложение 8. *Пусть* μ — *ограниченная положительная мера на* T, S — μ-*измеримое множество, несущее* μ, *и* f — *такое* μ-*измеримое отображение* T *в* F, *что* $f(S)$ *содержится в некотором уравновешенном выпуклом ограниченном и* полном *множестве* B *из* F. *Тогда* f *скалярно существенно* μ-*интегрируемо и* $\int f\,d\mu \in \mu(T)\,B \subset F$.

Так как S μ-интегрируемо, то существует его разбиение, состоящее из μ-пренебрежимого множества N и последовательности (K_n) таких компактных множеств, что сужение f на каждое K_n непрерывно (гл. IV, § 5, n° 1); следовательно $f(K_n)$ есть компактное множество в F. Тогда замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка B_n множества $f(K_n)$ предкомпактна (Топ. вект. простр., гл. II, § 4, предложение 2) и содержится в полном подмножестве B из F, а значит, компактна, и, тем более, слабо компактна. Значит (следствие предложения 5), $f\varphi_{K_n}$ скалярно μ-интегрируемо и $z_n = \int f\varphi_{K_n} d\mu \in \mu(K_n)\,B_n \subset \mu(K_n)\,B$. Следовательно, для любой непрерывной полунормы p на F имеем $p(z_n) \leqslant \leqslant \mu(K_n) \sup\limits_{x \in B} p(x)$; поскольку B ограничено и ряд с общим членом $\mu(K_n)$ сходится и имеет сумму $\mu(T)$, то легко видеть, что последовательность с общим членом $s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ есть последовательность Коши в полном подмножестве $\mu(T)\,B$ из F. Стало быть, эта последовательность сходится к некоторому элементу s из $\mu(T)\,B$; а так как можно предположить $f(t) = 0$ на $T - S$, то, применяя теорему Лебега к каждой из функций $\langle z', f\rangle$ $(z' \in F')$, получаем, что $s = \int f\,d\mu$.

3. *Интегралы от операторов*

Пусть G и H — отделимые локально выпуклые пространства над $\mathbf{R}$ и пусть теперь F есть пространство $\mathscr{L}(G;\ H)$ всех непрерывных линейных отображений G в H, наделенное топологией *простой* сходимости. Тогда сопряженным F' к F служит пространство $G \otimes H'$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, следствие предложения 11), и утверждение, что отображение U пространства T в F скалярно существенно μ-интегрируемо, означает, что для любого $a \in G$ и любого $b \in H'$ числовая функция $t \mapsto \langle U(t),\ a \otimes b' \rangle = = \langle U(t)\,a,\ b' \rangle$ существенно μ-интегрируема.

Предложение 9. *Пусть U — скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в $F = \mathscr{L}_s(G; H)$. Для того чтобы $\int U\,d\mu \in F$, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие два условия:*

a) $\int (U(t)\,x)\,d\mu(t) \in H$ *для любого* $x \in G$.

b) *Для любого равностепенно непрерывного множества B' из H' множество линейных форм $u_{y'}\colon x \mapsto \int \langle U(t)\,x,\ y' \rangle\,d\mu(t)$, где y' пробегает B', равностепенно непрерывно.*

Условия необходимы. В самом деле, так как для любого $x \in G$ отображение $\tilde{x}\colon V \mapsto Vx$ пространства $\mathscr{L}_s(G; H)$ в H линейно и непрерывно, то легко видеть (предложение 1), что $\tilde{x} \circ U\colon t \mapsto U(t)\,x$ скалярно существенно μ-интегрируемо и

$$Sx = \int (U(t)\,x)\,d\mu(t), \tag{1}$$

где $S = \int U\,d\mu \in \mathscr{L}_s(G; H)$. Этим доказано a). При этом формулу (1) можно также записать в виде

$$\langle Sx,\ y' \rangle = \int \langle U(t)\,x,\ y' \rangle\,d\mu(t) = \langle x,\ u_{y'} \rangle, \tag{2}$$

так что ${}^tSy' = u_{y'}$. А так как S непрерывно, то ${}^tS$ переводит всякое равностепенно непрерывное множество из H' в равностепенно непрерывное множество в G', чем доказано b).

Обратно, предположим, что a) и b) выполнены. В силу a), формула (1) определяет линейное отображение S пространства G в H, и это отображение удовлетворяет формуле (2) при любом $y' \in H'$ (предложение 1); но тогда условие b) выражает, что S непрерывно (Топ. вект. простр., гл. IV, § 4, предложения 1 и 2 и § 2, предложение 1), и, значит, $S \in \mathscr{L}_s(G; H)$. Наконец, формула (2) показывает, что $S = \int U\,d\mu$.

Следствие. *Условие* b) *предложения* 9 *выполняется в каждом из следующих двух случаев:*

1°. *Мера μ ограничена, и $U(S)$, где S — ее носитель, есть равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{L}(G; H)$.*

2°. *Условие* а) *предложения* 9 *выполнено, пространство* G *бочечно и* $U(K)$ *для любого компактного множества* K *из* T *есть ограниченное множество в* $\mathcal{L}_s(G; H)$.

Сначала рассмотрим случай 1°. Можно ограничиться тем случаем, когда $S = T$ (гл. V, § 7, теорема 1). Тогда для любого равностепенно непрерывного множества B' из H' существует такое слабо замкнутое уравновешенное выпуклое равностепенно непрерывное множество $A' \subset G'$, что ${}^tU(t)y' \in A'$ для любого $y' \in B'$ и любого $t \in T$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 4, предложение 2). Так как U скалярно μ-интегрируемо, то отображение $t \mapsto {}^tU(t)y'$ пространства T в сопряженное G' к G, наделенное топологией $\sigma(G', G)$, скалярно μ-интегрируемо, и можно написать

$$u_{y'} = \int ({}^tU(t)\,y')\,d\mu(t).$$

Так как A' выпукло и компактно в топологии $\sigma(G', G)$, то следствие предложения 5 показывает, что $u_{y'} \in \mu(T)A'$ для любого $y' \in B'$, чем наше утверждение и доказано.

Перейдем теперь к случаю 2°. Для любого $y' \in H'$ и любого компактного множества K из T положим

$$u_{K,\,y'} = \int \varphi_K(t)\,({}^tU(t)\,y')\,d\mu(t),$$

что представляет собой элемент алгебраического сопряженного G^* к G. Поскольку G бочечно, всякое ограниченное множество из $\mathcal{L}_s(G; H)$ равностепенно непрерывно (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 2); первая часть доказательства в применении к функции $\varphi_K U$ и ограниченной мере $\varphi_K\mu$ показывает, что $u_{K,\,y'} \in G'$. Кроме того, $u_{y'} = \lim\limits_K u_{K,\,y'}$ в топологии $\sigma(G^*, G)$, причем предел берется по возрастающему фильтрующемуся множеству всех компактных подмножеств из T (гл. V, § 2, предложение 8). Для проверки выполнения условия b) предложения 9 достаточно, согласно предложению 9, доказать, что линейное отображение S пространства G в H, определенное формулой (1), непрерывно; при этом, поскольку G бочечно, достаточно показать, что S непрерывно при наделении G и H их ослабленными топологиями (Топ. вект. простр., гл. IV, § 4, следствие предложения 7); наконец, в силу (2), все сводится к доказательству того, что $u_{y'} \in G'$ для

любого $y' \in H'$. Но так как $u_{y'}$ есть точка прикосновения в топологии $\sigma(G^*, G)$ для множества M' элементов $u_{K,y'}$, где K пробегает все компактные подмножества из T, то достаточно показать, что M' равностепенно непрерывно; а поскольку G бочечно, это сводится к утверждению, что для любого $x \in G$ множество всех $\langle x, u_{K,y'}\rangle$ ограничено (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 2). Но это сразу вытекает из соотношений

$$|\langle x, u_{K,y'}\rangle| = \left|\int \varphi_K(t)\langle U(t)x, y'\rangle\, d\mu(t)\right| \leqslant \int |\langle U(t)x, y'\rangle|\, d\mu(t).$$

Предложение 10. *Пусть U — отображение T в $F = \mathscr{L}_s(G; H)$. В каждом из трех нижеследующих случаев U скалярно существенно μ-интегрируемо и $\int U\, d\mu \in \mathscr{L}_s(G; H)$:*

a) *H квазиполно, мера μ ограничена, и, если S — ее носитель, U μ-измеримо, а $U(S)$ равностепенно непрерывно.*

b) *H полурефлексивно, мера μ ограничена, и, если S — ее носитель, U скалярно μ-измеримо, а $U(S)$ равностепенно непрерывно.*

c) *H полурефлексивно, G бочечно, U скалярно существенно μ-интегрируемо, и $U(K)$ ограничено для любого компактного множества K из T.*

То, что U скалярно существенно интегрируемо, очевидно во всех трех случаях; в силу предложения 9 и его следствия, достаточно удостовериться в том, что в каждом из случаев выполняется условие a) предложения 9. Но это условие вытекает из предложения 8 в первом случае и из следствия предложения 7 в остальных двух случаях.

4. *Свойство* (GDF) *)

В этом n° мы рассмотрим локально выпуклые пространства F, обладающие следующим свойством (называемым свойством «счетно замкнутого графика»):

(GDF) *Если u — такое линейное отображение пространства F в банахово пространство B, что в пространстве-произведении $F \times B$ всякий предел любой сходящейся последовательности точек графика Γ отображения u принадлежит Γ, то u непрерывно.*

*) От французского «graphe dénombrablement fermé». *Прим. перев.*

Всякое пространство Фреше обладает свойством (GDF) (Топ. вект. простр., гл. I, § 3, следствие 5 теоремы 1). В Приложении мы приведем другие примеры пространств, обладающих свойством (GDF).

Предложение 11. *Всякое отделимое локально выпуклое пространство F, обладающее свойством* (GDF), *бочечно.*

Пусть V — бочка в F и q — ее калибровочная функция и тем самым полунорма на F; пусть, далее, H — отделимое пространство, ассоциированное с пространством F, наделенным топологией, определяемой одной этой полунормой. Пополнение $\hat{H}$ пространства H есть банахово пространство; пусть π — каноническое отображение F в $\hat{H}$; мы покажем, что π *непрерывно* (в исходной топологии пространства F); тем самым предложение будет доказано, ибо тогда прообраз V единичного шара из $\hat{H}$ относительно отображения π будет окрестностью нуля в F. Для доказательства же непрерывности π достаточно, в силу (GDF), показать, что график отображения π *замкнут* в $F \times \hat{H}$; иными словами, мы должны показать, что если $\mathfrak{F}$ — фильтр в F, сходящийся к $x \in F$, и если его образ $\pi(\mathfrak{F})$ сходится к $y \in \hat{H}$, то $y = \pi(x)$. Но всякий элемент x' поляры V^0 множества V в F' единственным образом продолжается до непрерывной линейной формы на $\hat{H}$ (которую мы обозначаем снова через x'), и множество этих форм составляет единичный шар пространства, сопряженного к $\hat{H}$; таким образом, достаточно показать, что $\langle y, x'\rangle = \langle \pi(x), x'\rangle$ для любого $x' \in V^0$. Но это вытекает из соотношений

$$\langle y, x'\rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle \pi(z), x'\rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle z, x'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle \pi(x), x'\rangle.$$

Теорема 1 (Гельфанда — Данфорда). *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, обладающее свойством* (GDF), *и F'_s — его слабое сопряженное. Для любого скалярно существенно μ-интегрируемого отображения f пространства T в F'_s интеграл $\int f\,d\mu$ принадлежит F'.*

Напомним, что сопряженным к F'_s служит F (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, предложение 1). Значит, при любом $z \in F$ числовая функция $\langle z, f\rangle$ существенно μ-интегрируема; обозначим

через $\theta(z)$ ее класс в $L^1(\mu)$. Для того чтобы показать, что $\int f\,d\mu \in F'$, необходимо установить, что линейная форма $z \mapsto \left\langle z, \int f\,d\mu \right\rangle$ непрерывна на F; мы докажем следующий, более сильный результат:

Лемма 2. *Пусть f — такое отображение T в F'_s, что при любом $z \in F$ числовая функция $\langle z, f\rangle$ принадлежит $\overline{\mathscr{L}}^p(\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, и пусть $\theta(z)$ — класс этой функции в $L^p(\mu)$. Тогда $z \mapsto \theta(z)$ есть непрерывное линейное отображение F в $L^p(\mu)$.*

Согласно свойству (GDF), достаточно показать, что если последовательность (z_n) элементов из F сходится к z и $(\theta(z_n))$ сходится к $u \in L^p(\mu)$, то $u = \theta(z)$. Но, заменяя, если нужно, последовательность (z_n) некоторой ее подпоследовательностью, мы можем предполагать, что последовательность функций $\langle z_n, f\rangle$ сходится локально почти всюду к некоторой функции $h \in \overline{\mathscr{L}}^p(\mu)$ класса u в $L^p(\mu)$ (гл. IV, § 3, теорема 3 и гл. V, § 2, предложение 6). А так как, по условию, последовательность $(\langle z_n, f(t)\rangle)$ при любом $t \in T$ сходится к $\langle z, f(t)\rangle$, то $h(t) = \langle z, f(t)\rangle$ локально почти всюду, и стало быть, $u = \theta(z)$.

Следствие 1. *Пусть G_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n отделимых локально выпуклых пространств, обладающих свойством* (GDF), *и пусть F — пространство всех раздельно непрерывных полилинейных форм на $\prod_{i=1}^{n} G_i$, наделенное топологией простой сходимости. Тогда для любого скалярно существенно μ-интегрируемого отображения f пространства T в F имеем $\int f\,d\mu \in F$.*

Пространство F находится в двойственности с тензорным произведением $\bigotimes_{i=1}^{n} G_i$, и топология простой сходимости в F есть не что иное, как топология $\sigma\left(F, \bigotimes_{i=1}^{n} G_i\right)$. Следовательно, алгебраическое сопряженное F'^* к F' есть пространство всех полилинейных форм на $\prod_{i=1}^{n} G_i$. Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — элемент

из $\prod_{i=1}^{n} G_i$; для любой полилинейной формы $u \in F'^*$ отображение $x \mapsto u(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ есть линейная форма на G_i, которую мы обозначим $\lambda_i(z)(u)$; таким образом, получаем линейное отображение $\lambda_i(z)$ пространства F'^* в алгебраическое сопряженное G_i^* к G_i, непрерывное в топологиях $\sigma\left(F'^*, \bigotimes_{i=1}^{n} G_i\right)$ и $\sigma(G_i^*, G_i)$. Утверждение, что $u \in F$, означает, что $\lambda_i(z)(u) \in G_i'$ для любого индекса i и любого $z \in \prod_{i=1}^{n} G_i$. Но, согласно предложению 1, $\lambda_i(z) \circ f$ есть скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в пространство G_i', наделенное топологией $\sigma(G_i', G_i)$, и $\int (\lambda_i(z) \circ f)\, d\mu = \lambda_i(z)\left(\int f\, d\mu\right)$. По теореме 1 имеем $\int (\lambda_i(z) \circ f)\, d\mu \in G_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и, следовательно, $\int f\, d\mu \in F$.

Следствие 2. *Пусть G — отделимое локально выпуклое пространство, обладающее свойством* (GDF), *и H — полурефлексивное пространство, сильное сопряженное к которому H_b' обладает свойством* (GDF) (см. Приложение, предложение 3). *Пусть, далее, F — пространство $\mathcal{L}_s(G; H)$; тогда для любого скалярно существенно μ-интегрируемого отображения U пространства T в F интеграл $\int U\, d\mu$ принадлежит F.*

Так как G бочечно (предложение 11), то $\mathcal{L}(G; H) = \mathcal{L}(G_\sigma; H_\sigma)$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 4, следствие предложения 7); кроме того, можно заменить $F = \mathcal{L}_s(G; H)$ пространством $\mathcal{L}_s(G_\sigma; H_\sigma)$, поскольку оба они имеют одно и то же сопряженное $G \otimes H'$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, следствие предложения 11 и § 1, предложение 1). Если для каждого $u \in \mathcal{L}(G; H) = \mathcal{L}(G_\sigma; H_\sigma)$ положить $\tilde{u}(x, y') = \langle u(x), y' \rangle$ $(x \in G,\ y' \in H')$, то линейное отображение $u \mapsto \tilde{u}$ будет биекцией пространства F на пространство F_1 всех раздельно непрерывных билинейных форм на $G_\sigma \times H_s'$, где H_s' означает сопряженное H', наделенное слабой топологией $\sigma(H', H)$ (Приложение, n° 1); кроме того, это отображение есть изоморфизм $\mathcal{L}_s(G_\sigma; H_\sigma)$ на F_1, наделенное топологией простой сходимости (там же). Но так как H, в силу предположения, есть сопряженное

к H'_b, то F_1 есть также пространство всех раздельно непрерывных билинейных форм на $G \times H'_b$. Таким образом, следствие 2 вытекает из следствия 1.

Отметим, что следствие 2 применимо, в частности, когда G — *банахово пространство*, а H — *рефлексивное банахово пространство*.

5. *Измеримые и скалярно измеримые отображения*

Из того, что отображение f пространства T в отделимое локально выпуклое пространство F скалярно μ-измеримо, вообще говоря, не следует, что f μ-измеримо (упражнение 12). Однако справедливо

Предложение 12. *Если F — сепарабельное метризуемое локально выпуклое пространство, то всякое скалярно μ-измеримое отображение f пространства T в F будет также μ-измеримым.*

В самом деле, F может рассматриваться как подпространство счетного произведения $\prod_n E_n$ банаховых пространств (Топ. вект. простр., гл. II, § 5, предложение 7), причем можно предполагать, что $\mathrm{pr}_n(F)$ плотно в E_n, которое, следовательно, сепарабельно. При любом n отображение $\mathrm{pr}_n \circ f$ скалярно μ-измеримо, а значит, μ-измеримо (гл. IV, § 5, предложение 10), и, стало быть, f μ-измеримо (гл. IV, § 5, теорема 1).

Предложение 13. *Пусть F — локально выпуклое пространство, являющееся индуктивным пределом последовательности сепарабельных метризуемых локально выпуклых пространств F_n и их объединением. Пусть, далее, F' — сопряженное к F, наделенное топологией $\sigma(F', F)$. Тогда всякое скалярно μ-измеримое отображение f пространства T в F' будет также μ-измеримым.*

Предположим сначала, что F метризуемо и сепарабельно. Пусть D — счетное множество, плотное в F, и (V_n) — убывающая фундаментальная последовательность уравновешенных выпуклых открытых окрестностей нуля в F; их поляры V_n° равностепенно непрерывны и имеют своим объединением все F'. Пусть $T_n = f^{-1}(V_n^\circ)$; последовательность (T_n) возрастает и $T = \bigcup_n T_n$; покажем, что каждое T_n *μ-измеримо*. В самом деле, $D \cap V_n$ плотно в V_n; для каждого $y \in D \cap V_n$ обозначим через S_y множество тех

$t \in T$, для которых $|\langle y, f(t) \rangle| \leqslant 1$; из сделанного предположения вытекает, что каждое S_y измеримо и T_n есть пересечение счетного семейства множеств S_y $(y \in D \cap V_n)$. Тогда для каждого компактного подмножества K из T и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое n, что $\mu(K - (K \cap T_n)) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, далее, такое компактное множество $K_1 \subset K \cap T_n$, что $\mu((K \cap T_n) - K_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, и, наконец, такое компактное множество $K_2 \subset K_1$, что $\mu(K_1 - K_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и сужения на K_2 всех функций $\langle y, f \rangle$ $(y \in D)$ непрерывны (гл. IV, § 5, предложение 2). А так как множество $f(K_2) \subset f(T_n) \subset V_n^{\circ}$ равностепенно непрерывно, то топология, индуцированная в $f(K_2)$ топологией $\sigma(F', F)$, совпадает с топологией простой сходимости на D (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, теорема 1); значит, сужение отображения f на K_2 непрерывно, откуда и следует наше утверждение в этом частном случае.

Переходим к общему случаю. Если z' — непрерывная линейная форма на F, то ее сужение z'_n на F_n непрерывно; а поскольку $F = \bigcup_n F_n$, то сопряженное F' к F отождествимо (алгебраически) с векторным подпространством произведения $\prod_n F'_n$, причем $\mathrm{pr}_n z' = z'_n$. Кроме того, так как всякое конечное подмножество из F содержится в одном из F_n, топология $\sigma(F', F)$ есть не что иное, как топология, индуцированная произведением топологий $\sigma(F'_n, F_n)$. Если теперь f скалярно μ-измеримо, то $\mathrm{pr}_n \circ f$ скалярно μ-измеримо, ибо $\mathrm{pr}_n(f(t))$ для любого $t \in T$ есть сужение отображения $f(t)$ на F_n. Первая часть доказательства показывает, что $\mathrm{pr}_n \circ f$ μ-измеримо при любом n, и, стало быть, то же верно для f (гл. IV, § 5, теорема 1).

6. *Применения: I. Распространение непрерывной функции на пространство мер*

Пусть T — локально компактное пространство, F — *квазиполное* отделимое локально выпуклое пространство и f — непрерывное отображение T в F; если μ — положительная мера на T с *компактным* носителем S, то $f(S)$ компактно; тогда замкнутая выпуклая оболочка множества $f(S)$ компактна (Топ. вект. простр.,

гл. III, § 2, n° 5), а следовательно, f скалярно μ-интегрируемо и $\int f\,d\mu \in F$ (следствие предложения 5). Если теперь λ — произвольная действительная мера с компактным носителем, то λ^+ и λ^- — положительные меры с компактным носителем; полагая $\int f\,d\lambda = \int f\,d\lambda^+ - \int f\,d\lambda^-$, сразу видим (используя соотношение $(\lambda+\mu)^+ + \lambda^- + \mu^- = \lambda^+ + \mu^+ + (\lambda+\mu)^-$), что $\lambda \mapsto \int f\,d\lambda$ есть *линейное* отображение пространства $\mathscr{C}'(T)$ мер на T *с компактным носителем* в локально выпуклое пространство F.

Отметим теперь, что пространство $\mathscr{C}'(T)$ отождествимо с *сопряженным* к пространству $\mathscr{C}(T)$ всех непрерывных числовых функций на T (откуда и обозначение), наделенному топологией *компактной сходимости* (что мы и будем всегда предполагать в этом и следующем nn°); действительно, мы знаем, с одной стороны (гл. III, § 3, предложение 11), что меры на T, которые могут быть продолжены до непрерывных линейных форм на $\mathscr{C}(T)$, это меры с компактным носителем, и обратно, сужение на $\mathscr{K}(T)$ непрерывной линейной формы на $\mathscr{C}(T)$ есть мера (поскольку топология пространства $\mathscr{K}(T)$ мажорирует топологию, индуцированную $\mathscr{C}(T)$).

Предложение 14. *Пусть T — локально компактное пространство, F — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство и f — непрерывное отображение T в F. Если пространство $\mathscr{C}'(T)$ мер на T с компактным носителем наделено топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из $\mathscr{C}(T)$, то отображение $\lambda \mapsto \int f\,d\lambda$ есть единственное непрерывное линейное отображение $\tilde{f}$ пространства $\mathscr{C}'(T)$ в F, при котором $\tilde{f}(\varepsilon_t) = f(t)$ для всех $t \in T$.*

Чтобы установить единственность продолжения, достаточно показать, что точечные меры ε_t составляют в $\mathscr{C}'(T)$ тотальное множество: так как сопряженным к $\mathscr{C}'(T)$ служит $\mathscr{C}(T)$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, теорема 2), то достаточно заметить, что всякая функция $g \in \mathscr{C}(T)$, ортогональная ко всем мерам ε_t, по определению, равна 0 (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, n° 3, замечание).

Покажем теперь, что $\lambda \mapsto \int f\,d\lambda$ непрерывно. Пусть V — уравновешенная замкнутая выпуклая окрестность нуля в F;

достаточно доказать существование такого относительно компактного подмножества L из $\mathscr{C}(T)$, что отношения $\lambda \in L^\circ$ и $z' \in V^\circ$ влекут $\left|\left\langle \int f\,d\lambda,\ z' \right\rangle\right| \leqslant 1$, или, что то же, $\left| \int \langle f,\ z' \rangle\, d\lambda \right| \leqslant 1$. Для этого покажем, что множество L числовых функций $\langle f, z' \rangle$, где z' пробегает V°, относительно компактно в $\mathscr{C}(T)$. Так как V° ограничено в топологии $\sigma(F', F)$, то верхняя грань чисел $|\langle f(t),\ z' \rangle|$ с фиксированным $t \in T$ и z', пробегающим V°, конечна; стало быть, в силу теоремы Асколи (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, следствие 2 теоремы 2), достаточно доказать, что множество функций $\langle f,\ z' \rangle$ $(z' \in V^\circ)$ *равностепенно непрерывно*. Но, по предположению, для любого $t_0 \in T$ и любого $\delta > 0$ в T существует такая окрестность W точки t_0, что $f(t) - f(t_0) \in \delta V$ для всех $t \in W$; отсюда заключаем, что $|\langle f(t),\ z' \rangle - \langle f(t_0),\ z' \rangle| \leqslant \delta$ для любого $t \in W$ и любого $z' \in V^\circ$, что и завершает доказательство.

Замечания. 1) Отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ есть *гомеоморфизм* пространства T в $\mathscr{C}'(T)$; действительно, если L — компактное подмножество из $\mathscr{C}(T)$ и $t_0 \in T$, то существует (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, следствие 3 теоремы 2) такая окрестность W точки t_0, что $|g(t) - g(t_0)| \leqslant 1$ для любого $t \in V$ и любой функции $g \in L$, а значит, $\varepsilon_t - \varepsilon_{t_0} \in L^\circ$ для всех $t \in V$, чем и доказана непрерывность отображения $t \mapsto \varepsilon_{t_0}$; с другой стороны, известно, что обратное отображение непрерывно уже в широкой топологии (гл. III, § 2, предложение 6) и тем более в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах из $\mathscr{C}(T)$. Тогда, отождествляя T с его образом в $\mathscr{C}'(T)$ при отображении $t \mapsto \varepsilon_t$, можно сказать, что $\lambda \mapsto \int f\,d\lambda$ есть единственное *непрерывное продолжение* отображения f до *линейного* отображения.

2) Отметим, что при доказательстве непрерывности отображения $\lambda \mapsto \int f\,d\lambda$ не был использован тот факт, что F квазиполно. Следовательно, утверждение предложения 14 останется верным и без этого условия, если только известно, что $\int f\,d\mu \in F$ для любой положительной меры μ с компактным носителем.

Допустим теперь, что $f(T)$ есть *ограниченное* множество в F. Тогда для всякой *ограниченной* положительной меры μ на T отображение f скалярно μ-интегрируемо и $\int f\,d\mu \in F$ (предложение 8). Если λ — произвольная ограниченная действительная мера на T, то λ^+ и λ^- ограничены, и легко видеть, что, определенное как

и выше, отображение $\lambda \mapsto \int f\, d\lambda$ есть *линейное* отображение пространства $\mathfrak{M}^1(T)$ всех *ограниченных* мер на T в локально выпуклое пространство F, очевидно, являющееся продолжением отображения $\lambda \mapsto \int f\, d\lambda$ пространства $\mathscr{C}'(T)$ в F.

Предложение 15. *Пусть T — локально компактное пространство, F — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство и f — такое непрерывное отображение T в F, что $f(T)$ ограничено. При наделении пространства $\mathfrak{M}^1(T)$ его топологией банахова пространства, линейное отображение $\lambda \mapsto \int f\, d\lambda$ пространства $\mathfrak{M}^1(T)$ в F непрерывно.*

В самом деле, для любой замкнутой уравновешенной выпуклой окрестности V нуля в F существует такое $\rho > 0$, что $f(T) \subset \rho V$; следовательно, замкнутая выпуклая оболочка B множества $f(T)$ содержится в ρV, и, в силу условия, она полна. Тогда, если $\|\lambda\| \leqslant 1/\rho$, то из предложения 8 и соотношения $\|\lambda\| = \lambda^+(T) + \lambda^-(T)$ вытекает, что $\int f\, d\lambda \in B/\rho \subset V$.

7. Применения: II. Распространение на пространство мер непрерывной функции со значениями в пространстве операторов

Пусть G — отделимое локально выпуклое пространство и H — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство; обозначим через F пространство $\mathscr{L}(G; H)$ всех непрерывных линейных отображений G в H, наделенное топологией *компактной сходимости*. Пространство F не обязательно квазиполно, и если $t \mapsto U(t)$ есть непрерывное отображение T в F, а μ — положительная мера на T с компактным носителем, то не обязательно $\int U\, d\mu \in F$ (упражнение 27). Однако если для каждого компактного подмножества K из T множество $U(K)$ *равностепенно непрерывно*, то его уравновешенная выпуклая оболочка в F тоже равностепенно непрерывна (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, n° 5) и так как H квазиполно, то замыкание этой выпуклой оболочки будет полным множеством в F (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 4); значит, в этом случае заведомо $\int U\, d\mu \in F$ (предложение 8).

Дополнительное условие, наложенное на U, может быть выражено иначе:

Лемма 3. *Пусть G и H — локально выпуклые пространства и U — отображение локально компактного пространства T в $\mathcal{L}(G;\ H)$. Следующие условия равносильны*:

a) *Отображение $(t,\ x) \mapsto U(t)x$ произведения $T \times G$ в H непрерывно.*

b) *Для любого компактного подмножества K из T множество $U(K)$ равностепенно непрерывно и существует такое тотальное множество $D \subset G$, что для любого $x \in D$ отображение $t \mapsto U(t)x$ непрерывно на T.*

Кроме того, если U удовлетворяет этим условиям, то оно является непрерывным отображением пространства T в пространство $\mathcal{L}(G;\ H)$, наделенное топологией компактной сходимости.

Чтобы показать, что a) влечет b), заметим, что для любой окрестности V нуля в H и любого $t \in K$ существует, по условию, такая окрестность L_t точки t в T и такая окрестность W_t нуля в G, что отношения $t' \in L_t$ и $x \in W_t$ влекут $U(t')x \in V$. Достаточно покрыть K конечным числом окрестностей L_{t_i} и взять $W = \bigcap\limits_i W_{t_i}$, чтобы $U(t)x \in V$ для всех $t \in K$ и $x \in W$, чем доказана равностепенная непрерывность множества $U(K)$.

Обратно, пусть выполнено b); достаточно показать, что для любого компактного подмножества K из T отображение $(t,\ x) \mapsto U(t)x$ непрерывно на $K \times G$. Пусть $M = U(K)$; так как M равностепенно непрерывно, то отсюда следует, что в M топология простой сходимости на G совпадает с топологией простой сходимости на D (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, теорема 1); таким образом, условие b) влечет, что $t \mapsto U(t)$ есть непрерывное отображение K в $\mathcal{L}(G;\ H)$, наделенное топологией простой сходимости. С другой стороны, $(A,\ x) \mapsto Ax$ есть непрерывное отображение $M \times G$ в H, когда M наделено топологией простой сходимости (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, следствие 4 предложения 1). А так как отображение $(t,\ x) \mapsto U(t)x$ разлагается на $(t,\ x) \mapsto (U(t),\ x) \mapsto U(t)x$, то заключаем, что оно непрерывно.

Наконец, последнее утверждение леммы вытекает из того, что в M топология компактной сходимости совпадает с топологией простой сходимости (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, теорема 1).

Итак, предположим, что U удовлетворяет условиям леммы 3; тогда (если H квазиполно) определится, как и в n° 6, линейное отображение $\lambda \mapsto \int U\,d\lambda$ пространства $\mathscr{C}'(T)$ в $F = \mathscr{L}(G;\ H)$. Положим $U(\lambda) = \int U\,d\lambda$.

Предложение 16. *Пусть G и H — отделимые локально выпуклые пространства, причем H квазиполно. Пусть, далее, U — такое отображение T в $\mathscr{L}(G;\ H)$, что $(t,\ x) \mapsto U(t)x$ есть непрерывное отображение $T \times G$ в H. Тогда билинейное отображение $(\lambda,\ x) \mapsto U(\lambda)x$ произведения $\mathscr{C}'(T) \times G$ в H гипонепрерывно относительно равностепенно непрерывных подмножеств из $\mathscr{C}'(T)$ и компактных подмножеств из G (что влечет непрерывность линейного отображения $\lambda \mapsto U(\lambda)$ пространства $\mathscr{C}'(T)$ в F).*

Непрерывность $\lambda \mapsto U(\lambda)$ как отображения $\mathscr{C}'(T)$ в F вытекает из леммы 3 и замечания 2 к предложению 14. Остается, следовательно, доказать, что для любой замкнутой уравновешенной выпуклой окрестности V нуля в H и любого равностепенно непрерывного подмножества N из $\mathscr{C}'(T)$ существует такая окрестность нуля W в G, что отношения $x \in W$, $\lambda \in N$ влекут $U(\lambda)x \in V$. Можно предполагать, что $N = S^\circ$, где S — окрестность нуля в $\mathscr{C}(T)$, и, значит, можно считать, что S есть множество всех функций $g \in \mathscr{C}(T)$, для которых $|g(t)| \leqslant 1$ на некотором компактном подмножестве K из T. Достаточно показать, что $|\langle U(\lambda)x,\ x'\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in W$, $x' \in V^\circ$ и $\lambda \in S^\circ$. Но так как $U(K)$ равностепенно непрерывно, то в G существует такая окрестность нуля W, что отношения $t \in K$, $x \in W$ влекут $U(t)x \in V$; следовательно, отношения $x \in W$, $x' \in V^\circ$ влекут, что функция $t \mapsto \langle U(t)x,\ x'\rangle$ принадлежит S, и, значит, по определению S°, что

$$|\langle U(\lambda)\,x,\ x'\rangle| \leqslant \left| \int \langle U(t)\,x,\ x'\rangle\, d\lambda(t) \right| \leqslant 1.$$

Предположим теперь, что U — непрерывное отображение T в F, причем $U(T)$ *равностепенно непрерывно*. Тогда то же рассуждение, что и выше, доказывает (поскольку H квазиполно), что для всякой *ограниченной* положительной меры μ на T имеем $\int U\,d\mu \in F$. Стало быть, как и выше, определяется линейное отображение

$\lambda \mapsto \int U\,d\lambda = U(\lambda)$ пространства $\mathfrak{M}^1(T)$ в F, продолжающее аналогичное отображение $\mathscr{C}'(T)$ в F. При этом для любой замкнутой уравновешенной выпуклой окрестности V нуля в H существует, по условию, такая окрестность W нуля в G, что $U(t)x \in V$ для всех $x \in W$ и $t \in T$, а значит (поскольку V слабо замкнуто), $\int (U(t)x)\,d\lambda(t) \in \|\lambda\|\,V$ (предложение 5). Иными словами:

Предложение 17. *Пусть G и H — отделимые локально выпуклые пространства, причем H квазиполно. Пусть, далее, U — такое отображение T в $\mathscr{L}(G; H)$, что $(t, x) \mapsto U(t)x$ непрерывно на $T \times G$ и $U(t)$ равностепенно непрерывно. Тогда, если $\mathfrak{M}^1(T)$ наделено своей топологией банахова пространства, билинейное отображение $(\lambda, x) \mapsto U(\lambda)x$ произведения $\mathfrak{M}^1(T) \times G$ в H непрерывно (что влечет, в частности, непрерывность линейного отображения $\lambda \mapsto U(\lambda)$ пространства $\mathfrak{M}^1(T)$ в $\mathscr{L}(G; H)$, наделенное топологией ограниченной сходимости).*

Предложение 18. *Пусть G_1, G_2, H_1, H_2 — отделимые локально выпуклые пространства, причем H_1 и H_2 квазиполны. Пусть, далее, $A\colon G_1 \to G_2$ и $B\colon H_1 \to H_2$ — непрерывные линейные отображения. Пусть, наконец, $U_1\colon T \to \mathscr{L}(G_1; H)$, $U_2\colon T \to \mathscr{L}(G_2; H_2)$ — отображения, удовлетворяющие условиям предложения* 16 (соотв. 17), *причем $B \circ U_1(t) = U_2(t) \circ A$ для всех $t \in T$. Тогда $B \circ U_1(\lambda) = U_2(\lambda) \circ A$ для всякой меры λ на T с компактным носителем* (соотв. *ограниченной*).

В самом деле, для любого $x \in G_1$ имеем (предложение 1)

$$(B \circ U_1(\lambda))\,x = \int ((B \circ U_1(t))\,x)\,d\lambda(t) = \\ = \int ((U_2(t) \circ A)\,x)\,d\lambda(t) = U_2(\lambda)\,(Ax).$$

Замечания. 1) Предположим, что G и H — *банаховы пространства* и U — такое отображение T в $\mathscr{L}(G; H)$, что $(t, x) \mapsto U(t)\,x$ непрерывно на $T \times G$. Отметим, что отсюда следует, что конечная функция $t \mapsto \|U(t)\|$ ограничена на любом компактном подмножестве из T и *полунепрерывна снизу* на T как верхняя огибающая непрерывных функций $t \mapsto |U(t)\,x|$, где x пробегает шар $|x| \leqslant 1$ пространства G. Положим $h(t) = \|U(t)\|$. Тогда для

всякой положительной меры μ на T, обладающей тем свойством, что функция h μ-интегрируема, снова имеем $\int U\,d\mu \in \mathscr{L}(G;\ H)$. В самом деле, мера $\nu = h\mu$, по предположению, ограничена; следовательно, существует разбиение пространства T, состоящее из ν-пренебрежимого множества N и последовательности (K_n) компактных подмножеств. Рассуждение, проведенное в начале этого n°, в применении к мере $\varphi_{K_n}\mu$ показывает, что $A_n = \int \varphi_{K_n} U\,d\mu \in F = \mathscr{L}(G;\ H)$, причем (предложение 6) $\|A_n\| \leqslant \int \varphi_{K_n} \|U\|\,d\mu \leqslant \nu(K_n)$. Стало быть, ряд с общим членом A_n абсолютно сходится в банаховом пространстве $\mathscr{L}(G;\ H)$ и ясно, что его сумма равна $\int U\,d\mu$, причем $\left\| \int U\,d\mu \right\| \leqslant \int \|U\|\,d\mu$.

2) Предположим, что $G = H$ квазиполно и U удовлетворяет условиям предложения 16. Пусть M — подмножество пространства $\mathscr{C}'(T)$, *всюду плотное* в слабой топологии $\sigma(\mathscr{C}'(T),\ \mathscr{C}(T))$, и X — такое замкнутое векторное подпространство пространства H, что $U(\lambda)(X) \subset X$ для каждой меры $\lambda \in M$. Тогда также $U(t)(X) \subset X$ при любом $t \in T$: действительно, для всякого $x \in X$ и всякого $x' \in H'$, ортогонального к X, по предположению, при всех $\lambda \in M$ имеем $\langle U(\lambda)x,\ x'\rangle = 0$, а значит, $\int \langle U(t)x,\ x'\rangle\,d\lambda(t) = 0$. Поскольку непрерывная функция $t \mapsto \langle U(t)x,\ x'\rangle$ ортогональна к M, она равна 0, так что $\langle U(t)x,\ x'\rangle = 0$ при любом $x' \in X^\circ$, откуда $U(t)x \in X$ для всех $t \in T$ и $x \in X$, чем наше утверждение доказано.

Упражнения

1) Рассматриваются локально компактные пространства T и T', совпадающие с интервалом $[0,\ 1]$, и меры μ и μ' соответственно на T и T', совпадающие с мерой Лебега. Пусть F — гильбертово пространство, имеющее счетный ортонормальный базис, расположенный в двойную последовательность (e_{mn}), и пусть $F' = F$ — его сопряженное. Положим $u_m(t) = e_{mn}$, когда $(n-1)2^{-m} \leqslant t < n2^{-m}$ и $1 \leqslant n \leqslant 2^m$; далее, положим $f(t,\ t') = 2^m u_m(t)$, когда $2^{-m} < t' \leqslant 2^{-m+1}$, и, наконец, $f(t,\ 0) = 0$ и $f(1,\ t') = 0$. Показать, что функция f скалярно интегрируема относительно меры-произведения $\mu \otimes \mu'$, но что *ни для какого* $t \in T$ функция $t' \mapsto f(t,\ t')$ не будет скалярно интегрируемой относительно μ'.

*2) Пусть T, X и Y — локально компактные пространства, причем Y имеет счетный базис. Пусть, далее, μ — мера $\geqslant 0$ на T, $t \mapsto \lambda_t$ ($t \in T$) есть μ-согласованное семейство мер $\geqslant 0$ на X; положим $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Пусть, наконец, $x \mapsto \rho_x$ ($x \in X$) есть ν-согласованное семейство мер $\geqslant 0$ на Y. Предположим, кроме того, что выполнено *одно* из следующих условий:

a) X счетно в бесконечности;

b) ν ограничена.

Показать, что тогда существует такое локально μ-пренебрежимое множество N', что при любом $t \notin N'$ семейство $x \mapsto \rho_x$ λ_t-согласовано; кроме того, семейство $t \mapsto \int \rho_x \, d\lambda_t(x)$, определенное для $t \notin N'$, μ-согласовано и

$$\int d\mu(t) \int \rho_x \, d\lambda_t(x) = \int \rho_x \, d\nu(x).$$

[Для доказательства того, что $x \mapsto \rho_x$ скалярно λ_t-интегрируемо локально почти всюду, применить лемму 1 § 3, использовав, в случае b), то, что λ_t ограничено локально почти всюду; тем же способом показать, что $t \mapsto \int \rho_x \, d\lambda_t(x)$ скалярно μ-интегрируемо; воспользоваться также предложением 13.]

3) Пусть S, T и Y — локально компактные пространства, счетные в бесконечности, причем Y имеет счетный базис. Пусть ρ (соотв. σ) — положительная мера на S (соотв. T), $\nu = \rho \otimes \sigma$ и $(\lambda_{s,\,t})_{(s,\,t) \in S \times T}$ есть ν-согласованное семейство положительных мер на Y. Тогда существует такое ρ-пренебрежимое множество N, что при любом $s \notin N$ семейство $(\lambda_{s,\,t})_{t \in T}$ σ-согласовано; семейство $s \mapsto \int \lambda_{s,\,t} \, d\sigma(t)$ (определенное почти всюду) ρ-согласовано и

$$\int \int \lambda_{s,\,t} \, d\rho(s) \, d\sigma(t) = \int d\rho(s) \int \lambda_{s,\,t} \, d\sigma(t).$$

[Применить упражнение 2 к пространству $X = S \times T$, заметив, что $\nu = \int (\varepsilon_s \otimes \sigma) \, d\rho(s)$.]

4) Пусть T, X и Y — локально компактные пространства, причем X счетно в бесконечности. Пусть, далее, μ — положительная мера на T, $(\lambda_t)_{t \in T}$ есть μ-согласованное семейство положительных мер на X и $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

a) Y имеет счетный базис;

b) мера ν ограничена.

При этих условиях, если π есть ν-собственное отображение пространства X в Y, то множество тех $t \in T$, для которых π не λ_t-собственно, локально μ-пренебрежимо; кроме того, семейство $(\pi(\lambda_t))_{t \in T}$ положительных мер на Y (определенное локально почти всюду на T) μ-согласовано и

$$\pi\left(\int \lambda_t \, d\mu(t)\right) = \int \pi(\lambda_t) \, d\mu(t).$$

[В случае a) применить упражнение 2 к $\rho_x = \varepsilon_{\pi(x)}$. В случае b) заметить, что λ_t ограничено локально почти всюду, и свести задачу к доказательству того, что отображение $t \mapsto \pi(\lambda_t)$ широко μ-измеримо (см. гл. V, § 3, предложение 3). Пусть заданы число $\varepsilon > 0$ и компактное подмножество K из T; заметить, прежде всего, что в X существует возрастающая последовательность (F_m) таких компактных множеств, что сужение π на каждое F_m непрерывно и выполняется неравенство $\nu(N_m) \leqslant \varepsilon/4^m$, где $N_m = X - F_m$. Пусть A_m — множество тех $t \in K$, для которых N_m не λ_t-интегрируемо или $\lambda_t(N_m) > 1/2^m$; обозначая через A объединение множеств A_m, имеем $\mu(A) \leqslant \varepsilon/2$. Пусть K_1 — такое компактное подмножество из $K - A$, что $\mu(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и для любой функции $g \in \mathscr{K}(X)$ сужение отображения $t \mapsto \int g(x) \, d\lambda_t(x)$ на K_1 непрерывно. Используя теорему Урысона, показать, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(Y)$ сужение на K_1 отображения $t \mapsto \int f(\pi(x)) \, d\lambda_t(x)$ есть равномерный предел непрерывных функций.]

°5) Пусть $f(t)$ для каждого $t \in \mathbf{R}$ означает непрерывную функцию $x \mapsto \exp(-2\pi i t x)$, элемент пространства $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ всех непрерывных комплексных функций на $\mathbf{R}$. Пространство $\mathscr{C}$ находится в двойственности с пространством $\mathscr{C}' = \mathscr{C}'_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ всех комплексных мер на $\mathbf{R}$ с компактным носителем; пространство $\mathscr{K} = \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ всех непрерывных комплексных функций с компактным носителем канонически отождествим с подпространством в $\mathscr{C}'$, отождествляя функцию $\varphi \in \mathscr{K}$ с мерой плотности φ относительно меры Лебега. Обозначим через $\mathscr{D}$ подпространство пространства $\mathscr{K}$, образованное всеми бесконечно дифференцируемыми комплексными функциями с компактным носителем. Показать, что если наделить $\mathscr{C}$ топологией $\sigma(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ или топологией $\sigma(\mathscr{C}, \mathscr{K})$, то f не будет скалярно интегрируемо относительно меры Лебега μ; в топологии же $\sigma(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, напротив, f скалярно μ-интегрируемо и $\int f \, d\mu$ есть мера ε_0; доказать, что в этом случае выполняются условия предложения 7.$_\circ$

6) Пусть F — правильное пространство Фреше (Топ. вект. простр., гл. IV, § 3, упражнение 10b) и F' — его сопряженное. Показать, что если f — скалярно существенно интегрируемое отображение

пространства T в F, то $\int f\,d\mu$ принадлежит второму сопряженному F'' к F. [Погрузить F в F''; применить теорему 1, а также предложение 2 и лемму 1 Приложения.]

7) a) Пусть $F = \overline{\mathscr{K}(\mathbf{N})}$ — банахово пространство всех сходящихся к 0 последовательностей действительных чисел и $F' = L^1(\mathbf{N})$ — его сопряженное (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, упражнение 1). Пусть, далее, $f = (f_n)$ — такое отображение интервала $I = [0, 1]$ в F, что $f_n(t) = n\varphi_{I_n}(t)$, где $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Показать, что f скалярно интегрируемо относительно меры Лебега μ на I, но $\int f\,d\mu$ есть элемент из F'', не принадлежащий F.

b) Пусть g — отображение интервала $J = [-1, +1]$ в F, определенное условиями $g(t) = f(t)$ для $t \geqslant 0$ и $g(t) = -f(-t)$ для $t \leqslant 0$. Тогда g скалярно интегрируемо относительно меры Лебега на J и $\int g\,d\mu \in F$, но существуют такие функции $h \in \mathscr{L}^\infty$, что $\int hg\,d\mu \notin F$.

c) Получить из a) новое доказательство того, что топологическое векторное пространство F не изоморфно сопряженному к нормированному пространству [см. Топ. вект. простр., гл. IV, § 5, упражнение 15в)].

8) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство и f — такое скалярно локально интегрируемое отображение пространства T в F, что $\int_K f\,d\mu \in F$ для любого компактного множества K из T.

a) Показать, что если f скалярно существенно интегрируемо, а F полурефлексивно (или только всякая последовательность Коши в топологии $\sigma(F, F')$ сходится в этой топологии в F, если T счетно в бесконечности), то $\int gf\,d\mu \in F$ для любой функции $g \in \mathscr{L}^\infty$.

b) Показать, что если F квазиполно и $\overline{\int}^* q(f(t))\,d\mu(t) < \infty$ для каждой непрерывной полунормы q на F, то f скалярно существенно интегрируемо и $\int gf\,d\mu \in F$ для любой функции $g \in \mathscr{L}^\infty$. [В обоих случаях рассмотреть фильтрующееся по возрастанию множество всех компактных подмножеств из T.]

9) Пусть G и H — отделимые локально выпуклые пространства и U — отображение пространства T в $F = \mathscr{L}_s(G; H)$. Предположим, что G бочечно, H квазиполно U μ-измеримо и $U(K)$ ограничено для любого компактного множества K из T; кроме того, предположим, что $\overline{\int}^* q(U(t)x)\,d\mu(t) < +\infty$ для каждой непрерывной полу-

нормы q на H и каждого $x \in G$. Показать, что при этих условиях U скалярно существенно μ-интегрируемо и $\int U(t)\, d\mu(t) \in F$. [Использовать упражнение 8b).]

10) Пусть G и H — пространства Фреше, G_0 (соотв. H_0) — всюду плотное подмножество в G (соотв. H) и $t \mapsto \Phi_t$ — отображение пространства T в пространство $F = \mathscr{B}(G, H)$ всех непрерывных билинейных форм на $G \times H$, наделенное топологией простой сходимости. Предположим, что: 1° для любой пары $(a, b) \in G_0 \times H_0$ отображение $t \mapsto \Phi_t(a, b)$ существенно μ-интегрируемо; 2° если для всякой пары ограниченных множеств $A \subset G$, $B \subset H$ при любом $\Phi \in \mathscr{B}(G; H)$ положить $q_{A, B}(\Phi) = \sup\limits_{(x, y) \in A \times B} |\Phi(x, y)|$, то $\int^* q_{A, B}(\Phi_t)\, d\mu(t) < +\infty$. При этих условиях показать, что $t \mapsto \Phi_t$ скалярно существенно μ-интегрируемо и $\int \Phi_t\, d\mu(t) \in F$. [Пользуясь теоремой Лебега, свести к применению следствия 1 теоремы 1.] Частный случай $H = \mathbf{R}$

11) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$ и F — гильбертово пространство, имеющее счетный ортонормальный базис (e_n). Пусть, далее, f — отображение T в F, определяемое условиями $f(0) = 0$ и $f(t) = 2^n \dfrac{e_n}{n}$ на интервалах $]2^{-n-1}, 2^{-n}]$ $(n \geqslant 0)$. Показать, что f μ-измеримо, скалярно μ-интегрируемо и таково, что $\int f\, d\mu \in F$, но $\int^* |f|\, d\mu = +\infty$.

12) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$ и F — гильбертово пространство, имеющее ортонормальный базис $(e_t)_{t \in T}$, равномощный T.

a) Пусть f — отображение $t \mapsto e_t$ интервала T в F. Показать, что f скалярно μ-пренебрежимо, но не μ-измеримо при наделении F слабой топологией $\sigma(F, F')$ (ни, тем более, исходной топологией).

b) Пусть A — не μ-измеримое множество в T (гл. IV, § 4, упражнение 8); показать, что функция $g = f\varphi_A$ скалярно μ-пренебрежима, но числовая функция $|g|$ не μ-измерима.

13) Пусть F' — отделимое локально выпуклое пространство, F' — его сопряженное и q — полунепрерывная снизу полунорма на F. Показать, что если f — отображение T в F, μ-измеримое в топологии $\sigma(F, F')$, то числовая функция $q \circ f$ μ-измерима.

14) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$; обозначим через F векторное пространство над $\mathbf{R}$ всех конечных числовых μ-измеримых функций на T, наделенное топологией простой сходимости, превращающей его в отделимое локально выпуклое пространство.

a) Показать, что в F существует всюду плотное счетное подмножество. [Рассмотреть всюду плотную последовательность в банаховом пространстве $\mathscr{C}(T)$ всех непрерывных числовых функций на T.]

b) Пусть $f(t)$ для каждого $t \in T$ — элемент сопряженного F' к F, определенный равенством $\langle f(t), z \rangle = z(t)$ при всех $t \in T$. Показать, что если F' наделено топологией $\sigma(F', F)$, то функция f скалярно μ-измерима, но не μ-измерима (ср. предложение 13).

15) Пусть F — метризуемое локально выпуклое пространство и f — такое скалярно μ-измеримое отображение пространства T в F, что для каждого компактного множества K из T существует счетное множество $H \subset F$, обладающее тем свойством, что $f(t) \in H$ для почти всех $t \in K$; показать, что при этих условиях f μ-измеримо в исходной топологии пространства F. [Погрузить F в счетное произведение нормированных пространств, предварительно сведя к случаю, когда F сепарабельно.]

16) Пусть F — банахово пространство и F' — его сопряженное. Для любого p такого, что $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, обозначим через $\Lambda^p_{F'}(T, \mu)$ (или просто $\Lambda^p_{F'}$) множество всех отображений f пространства T в F', обладающих тем свойством, что для всякого $z \in F$ числовая функция $\langle z, f \rangle$ принадлежит $\mathscr{L}^p(T, \mu)$. Тогда $\Lambda^p_{F'} \supset \mathscr{L}^p_{F'}$ и $\Lambda^1_{F'}$ есть пространство всех скалярно существенно μ-интегрируемых функций со значениями в F' (наделенном топологией $\sigma(F', F)$). Пусть $\theta(z)$ означает класс функции $\langle z, f \rangle$ в $L^p(\mu)$; известно, что отображение $z \mapsto \theta(z)$ непрерывно (лемма 2); пусть $M_p(f)$ — его норма; это — полунорма на пространстве $\Lambda^p_{F'}$. Для того чтобы $M_p(f) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы f было скалярно локально пренебрежимо.

a) Для того чтобы $f \in \Lambda^p_{F'}$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой числовой функции $g \in \mathscr{L}^q$ функция gf была скалярно существенно μ-интегрируема; тогда $M_1(gf) \leqslant M_p(f) N_q(g)$.

b) Для пространства $\Lambda^1_{F'}$ показать, что полунорма M_1 эквивалентна полунорме $M'_1(f) = \sup \left| \int_A f \, d\mu \right|$, где A пробегает множество всех измеримых подмножеств из T; более точно, $M'_1 \leqslant M_1 \leqslant 2M'_1$. Вывести отсюда, что M_p есть полунорма, эквивалентная $M'_p(f) = \sup_{N_q(g) \leqslant 1} M'_1(gf)$.

c) Возьмем в качестве F гильбертово пространство, имеющее счетный ортонормальный базис, и в качестве μ — меру Лебега на $T = [0, 1]$. Показать, что существует не интегрируемое, но скалярно интегрируемое отображение T в F, являющееся пределом по полунорме M_1 некоторой последовательности измеримых размещенных функций [см. упражнение 11]; вывести отсюда, что в пространстве $\mathscr{L}^1_{F}$ μ-интегрируемых функций топология, определенная полунормой M_1, слабее топологии, определенной нормой N_1. Аналогичный результат для полунорм M_p и N_p, где $1 \leqslant p < +\infty$.

d) Показать, что на $\mathscr{L}^{\infty}_{F'}$ $M_\infty = N_\infty$.

e) Возьмем в качестве F гильбертово пространство со счетным ортонормальным базисом, расположенным в двойную последовательность (e_{mn}), и пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$. Пусть, далее, u_m — отображение T в F, определяемое условиями $u_m(t) = e_{mn}$, когда $(n-1)\,2^{-m} \leqslant t < n2^{-m}$ и $1 \leqslant n \leqslant 2^m$, и $u_m(1) = 0$; положим $f_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Показать, что если $1 \leqslant p < +\infty$, то (f_n) есть последовательность Коши в $\Lambda^p_{F'}$, не сходящаяся, однако, ни к какой функции из $\Lambda^p_{F'}$.

f) Пусть (f_n) — последовательность Коши в пространстве $\Delta^p_{F'}$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$; предположим, что существует такое отображение f пространства T в F', что для всех $z \in F$ последовательность функций $\langle z, f_n\rangle$ сходится по мере к $\langle z, f\rangle$ (гл. IV, § 6, упражнение 11). Показать, что $f \in \Lambda^p_{F'}$ и последовательность (f_n) имеет в $\Lambda^p_{F'}$ предел f.

g) Возьмем в качестве F банахово пространство $L^1(\mathbf{N})$ всех абсолютно сходящихся рядов; его сопряженное $F' = L^{\infty}(\mathbf{N})$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, упражнение 1). Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$. Пусть, далее, f — отображение T в F', определяемое следующими условиями: $f(0) = 0$, а если $2^{-n-1} < t \leqslant 2^{-n}$, то $f(t)$ есть последовательность, в которой равны нулю все члены, кроме члена с номером n, равного $2^{n/p}$, где $1 \leqslant p < +\infty$. Показать, что f измеримо в сильной топологии пространства F' и принадлежит $\Lambda^p_{F'}$, но не существует никакой последовательности (f_n) размещенных функций, которая стремилась бы к f в пространстве $\Lambda^p_{F'}$.

*17) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$, F — банахово пространство $L^1(\mathbf{N})$ и $F' = L^{\infty}(\mathbf{N})$ — его сопряженное. Пусть, далее, $t = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n 2^{-n}$ для любого $t \in [0, 1]$ — его двоичное разложение; обозначим через $f(t)$ последовательность $(\xi_n) \in F'$ и положим $f(1) = 0$.

a) Показать, что функция f принадлежит всем пространствам $\Lambda^p_{F'}$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ (см. упражнение 16).

b) Показать, что f измерима в топологии $\sigma(F', F)$ и что существует последовательность размещенных функций, сходящаяся в этой топологии к f почти всюду.

c) Показать, что f неизмерима в сильной топологии пространства F' [заметить, что $|f(t) - f(t')| = 1$, когда $0 \leqslant t < t' < 1$].

d) Показать, что в пространстве $\Lambda^p_{F'}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ f не есть предел последовательности размещенных функций. [Свести к рассмотрению размещенных функций, являющихся линейными комбинациями (с коэффициентами из F') характеристических функций

интервалов с концами $k/2^n$; и если g — такая размещенная функция, показать, что, в обозначениях упражнения 16b), $M_1'(f-g) \geqslant \frac{1}{4}$.]

e) Показать, что не существует никакого отображения h пространства T в F', измеримого в сильной топологии, для которого бы $f - h$ было скалярно пренебрежимо. [Заметить, что такое отображение необходимо удовлетворяло бы неравенству $N_\infty(h) \leqslant 1$; получить таким путем противоречие с результатом пункта d).]

18) Показать, что предложение 8 остается верным, если условие, что f μ-измеримо (в исходной топологии пространства F), заменить условием, что f μ-измеримо в ослабленной топологии $\sigma(F, F')$. [Использовать упражнение 19c) § 4 гл. IV.]

*19) Пусть f — скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в F. Для любого $z' \in F'$ обозначим через $u_f(z')$ класс функции $\langle f, z'\rangle$ в $L^1(\mu)$. f называется *скалярно вполне интегрируемым*, если $\int gf\,d\mu \in F$ для каждой функции $g \in L^\infty(\mu)$.

a) Для того чтобы f было скалярно вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы u_f было непрерывно в топологиях $\sigma(F', F)$ и $\sigma(L^1, L^\infty)$. Если это имеет место, то образ при отображении u_f всякого равностепенно непрерывного множества из F' есть слабо относительно компактное множество в L^1. В частности: α) для каждого равностепенно непрерывного подмножества H' из F' и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество L в T, что $\int\limits_{T-L} |\langle f, z'\rangle|\,d\mu \leqslant$ $\leqslant \varepsilon$ для всех $z' \in H'$; β) для каждого равностепенно непрерывного множества H' из F' и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что $\int\limits_U |\langle f, z'\rangle|\,d\mu \leqslant \varepsilon$ для всякого открытого множества $U \subset T$ меры $\mu(U) \leqslant \eta$ и всех $z' \in H'$ (гл. V, § 5, упражнение 17).

b) Предположим, что выполнены условия α) и β) из a) и, кроме того, существует подпространство $H \subset L^\infty$, плотное в топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$ и такое, что $\int gf\,d\mu \in F$ для каждой функции $g \in L^\infty$, класс которой принадлежит H. Показать, что если при этих условиях предположить еще, что F *квазиполно*, то f будет скалярно вполне интегрируемо. [Прежде всего свести к случаю, когда F полно (в своей исходной топологии), и заметить, что $\dot{g} \longmapsto \int gf\,d\mu$ есть непрерывное линейное отображение L^∞ в F'^*, когда L^∞ наделено топологией $\tau(L^\infty, L^1)$, а F'^* — топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах из F'.]

c) Предположим, что f скалярно вполне интегрируемо. Показать, что для любой последовательности Коши (z'_n) в топологии $\sigma(F', F)$ последовательность $(u_f(z'_n))$ *сильно* сходится в L^1 [использовать упражнение 13a) § 6 гл. IV и упражнение 18b) § 5 гл. V]. Вывести отсюда, что если A — образ единичного шара пространства L^∞ при отображении $\dot{g} \mapsto \int gf\,d\mu$, то всякая последовательность Коши (z'_n) в топологии $\sigma(F', F)$ есть последовательность Коши в топологии равномерной сходимости на A.

d) Вывести из c), что если f скалярно вполне интегрируемо, то образ при отображении u_f всякого равностепенно непрерывного множества из F', метризуемого в топологии $\sigma(F', F)$, относительно *сильно* компактен в L^1. В частности, если F есть сопряженное G' к отделимому локально выпуклому пространству G, наделенное топологией, согласующейся с двойственностью между F и G, и если в G' существует сильно плотное счетное множество, то образ при отображении u_f всякого ограниченного множества из $F' = G$ относительно сильно компактен в L^1 [погрузить G в его второе сопряженное].

20) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, F' — его сопряженное и $\mathfrak{S}'$ — множество всех таких подмножеств $A' \subset F'$, что из любой последовательности точек множества A' можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в топологии $\sigma(F', F)$. Показать, что для ограниченного множества A из F следующие условия равносильны: α) A предкомпактно в $\mathfrak{S}'$-топологии; β) всякая последовательность, сходящаяся в топологии $\sigma(F', F)$, равномерно сходится на A. [Обозначив через $\mathfrak{S}$ множество, образованное всеми конечными подмножествами из F и множеством A, заметить, что из β) следует, что всякое множество $A' \in \mathfrak{S}'$ предкомпактно в $\mathfrak{S}$-топологии, воспользовавшись для этого упражнением 2 из Общ. топ., гл. II, § 4. Затем применить упражнение 12 из Топ. вект. простр., гл. IV, § 1.]

*21) Пусть f — скалярно вполне интегрируемое отображение пространства T в *квазиполное* отделимое локально выпуклое пространство F.

a) Показать, что образ при отображении $\dot{g} \mapsto \int gf\,d\mu$ единичного шара пространства L^∞ относительно компактен в *исходной* топологии пространства F в каждом из следующих случаев: 1° в F существует всюду плотное счетное множество; 2° F есть сопряженное G' к пространству G, метризуемому или являющемуся строгим индуктивным пределом последовательности метризуемых пространств, наделенное топологией $\tau(G', G)$. [Использовать упражнения 19c) и 20; в случае 2° воспользоваться теоремой Шмульяна (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнение 13b).]

b) Показать, что утверждение пункта a) остается справедливым, если, без дополнительных предположений относительно F, допустить,

что f измеримо. [Погрузив F в произведение банаховых пространств, свести к случаю, когда F — банахово пространство; затем, пользуясь упражнением 19a), свести к случаю, когда T компактно, после чего применить случай 1° пункта a).]

22) Пусть $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ — такое семейство точек отделимого локально выпуклого пространства F, что отображение $\alpha \mapsto z_\alpha$ скалярно вполне интегрируемо (упражнение 19) при наделении A мерой с массой $+1$ в каждой точке.

a) Показать, что семейство (z_α) *суммируемо* в любой топологии τ, согласующейся с двойственностью между F и F' [использовать упражнение 19a)]. И обратно, когда F квазиполно в топологии τ.

b) Предположим $F = G'$, $F' = G$, где G — такое отделимое локально выпуклое пространство, что в G' существует сильно плотное счетное множество. Показать, что тогда (z_α) суммируемо в *сильной* топологии пространства G' (не обязательно согласующейся с двойственностью между G' и G) [см. упражнение 19d)]. Показать, что этот результат не распространяется на случай, когда $G = L^1(\mathbf{N})$, $G' = L^\infty(\mathbf{N})$.

23) Пусть μ — положительная мера на T, сосредоточенная в счетном объединении компактных множеств.

a) Пусть H — такое множество μ-измеримых числовых функций, что $\sup_{f \in H} f(t) < +\infty$ для каждого $t \in T$. Показать, что существует конечная μ-измеримая функция g, для которой $f(t) \leqslant g(t)$ почти всюду для любой функции $f \in H$. [Свести к случаю, когда μ ограничена, а функции из H принимают свои значения в $[-1, +1]$, посредством возрастающего гомеоморфизма пространства $\overline{\mathbf{R}}$ на этот интервал. После этого рассмотреть верхнюю грань $\widetilde{g}$ в $L^1(\mu)$ множества классов всех функций из H (гл. IV, § 3, предложение 14) и заметить, что существует последовательность функций из H, сходящаяся почти всюду к g.]

b) Пусть f — скалярно μ-измеримое отображение пространства T в отделимое локально выпуклое пространство F. Показать, что для всякого множества $B' \subset F'$, ограниченного в топологии $\sigma(F', F)$, существует такая конечная измеримая числовая функция $g_{B'}$, что $|\langle f(t), z' \rangle| \leqslant g_{B'}(t)$ почти всюду для любого $z' \in B'$.

c) Пусть F — пространство Фреше и f — скалярно μ-измеримое отображение T в F. Показать, что для любого компактного подмножества K из T и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K' \subset K$, что $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$ и сужение f на K' ограничено [использовать b)].

24) Пусть F — *полное* отделимое локально выпуклое пространство, содержащее всюду плотное счетное множество. Пусть, далее, f — отображение T в F, скалярно μ-измеримое и скалярно существенно ограниченное; показать, что для любой функции $g \in \mathscr{L}^1$ отображение gf скалярно интегрируемо и $\int gf\,d\mu \in F$. [Воспользоваться теоремой 4

из Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, заметив, что равностепенно непрерывные подмножества из F' метризуемы в топологии $\sigma(F', F)$, и применив теорему Лебега.]

*25) Пусть F — сепарабельное пространство Фреше, в котором всякая последовательность Коши в топологии $\sigma(F, F')$ сходится в этой топологии (например, пространство $L^1(T', \nu)$, если T' имеет счетный базис [гл. V, § 5, упражнение 18b)]. Показать, что всякое скалярно существенно интегрируемое отображение f пространства T в F скалярно вполне интегрируемо. [Вначале доказать, что $\int gf\,d\mu \in F$ для любой функции $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ с компактным носителем, заметив, что f μ-измеримо (предложение 12), и применив предложение 8 и предположение. Отсюда, используя предположение, вывести, что $\int_A gf\,d\mu \in F$ для любой функции $g \in \mathscr{L}^\infty$ и любого множества A, являющегося счетным объединением компактных множеств. Наконец, в обозначениях упражнения 19, доказать, что образ при отображении u_f всякого равностепенно непрерывного подмножества из F' относительно слабо компактен в L^1, применив для этого теорему Эберлейна (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнение 15б)) и тот факт, что равностепенно непрерывные подмножества из F' метризуемы в топологии $\sigma(F', F)$.]

26) Пусть (f_n) — последовательность таких μ-интегрируемых функций на T, что $\sup_n \int |f_n(t)|\,d\mu(t) = +\infty$ и $\sup_n |f_n(t)| < +\infty$ для почти всех $t \in T$. Показать, что существует такая последовательность (c_n) скаляров, что $\sum_n |c_n| < +\infty$, а $\sum_n c_n f_n$ не μ-интегрируема. [Применить к пространству $L^1(\mathbf{N}) = F$ теорему Гельфанда — Данфорда.]

27) Пусть E — сепарабельное действительное банахово пространство, $G = E'$ — его сопряженное и G' — подпространство пространства E, плотное в E, отличное от E и бочечное [Топ. вект. простр., гл. III, § 1, упражнение 6]. Показать, что если наделить G топологией $\sigma(G, G')$, а его сопряженное $G' = \mathscr{L}(G; \mathbf{R})$ — топологией компактной сходимости, то G' не будет квазиполным и найдутся такая сходящаяся к нулю последовательность (x_n) в G' и такая последовательность (λ_n) чисел > 0 с конечной суммой, что ряд с общим членом $\lambda_n x_n$ не будет сходиться в G'. [Сначала заметить, что всякое подмножество из G, ограниченное в топологии $\sigma(G, G')$, ограничено по норме пространства G. Рассмотреть точку $a \in E$, не принадлежащую G', и последовательность (a_n) точек из G', сходящуюся к a в E и такую, что $\|a_{n+1} - a_n\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.]

§ 2. Векторные меры

1. *Определение векторной меры*

Определение меры, данное в главе III, § 2, n° 2, допускает следующее обобщение:

Определение 1. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$. *Векторной мерой на T со значениями в F* **называют** *всякое непрерывное линейное отображение пространства $\mathscr{K}(T)$ в F.*

Определение 1 можно выразить и следующим образом: векторная мера на T со значениями в F — это такое линейное отображение m пространства $\mathscr{K}(T)$ в F, что для любого компактного множества K из T сужение m на $\mathscr{K}(T, K)$ непрерывно в топологии равномерной сходимости. Вместо $m(f)$, где $f \in \mathscr{K}(T)$, пишут также $\int f\, dm$ или $\int f(t) dm(t)$. Меры со значениями в $\mathbf{R}$ (то есть меры, определенные в гл. III, § 2, n° 2) иногда называют *действительными* или *скалярными* мерами на T.

Примеры. 1) Тождественное отображение пространства $\mathscr{K}(T)$ на себя есть векторная мера на T со значениями в $\mathscr{K}(T)$.

2) °Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $\mathscr{L}(H)$ — нормированная алгебра всех его непрерывных эндоморфизмов и A — подалгебра алгебры $\mathscr{L}(H)$, коммутативная, замкнутая, самосопряженная и содержащая тождественное отображение; доказывается, что существуют компактное пространство X и изоморфизм нормированной алгебры A на алгебру $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(X)$ всех непрерывных комплексных функций на X, наделенную нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Сужение обратного изоморфизма на $\mathscr{K}(X)$ есть мера m на X со значениями в $\mathscr{L}(H)$, удовлетворяющая условию $m(fg) = m(f)m(g)$.${}_\circ$

Замечания. 1) Для того чтобы линейное отображение m пространства $\mathscr{K}(T)$ в F было векторной мерой, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества K из T образ при отображении m единичного шара $\|f\| \leqslant 1$ простран-

ства $\mathcal{K}(T, K)$ был *ограничен* в F. Следовательно, понятие векторной меры со значениями в F одинаково для всех отделимых локально выпуклых топологий в F, имеющих одни и те же ограниченные множества, и, в частности, для всех топологий, согласующихся с двойственностью между F и F' (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, теорема 3).

2) Пусть T_1 — локально компактное пространство, F_1 — отделимое локально выпуклое пространство над $\mathbf{R}$, u — непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{K}(T_1)$ в $\mathcal{K}(T)$ и v — непрерывное линейное отображение F в F_1. Если m — векторная мера на T со значениями в F, то $v \circ m \circ u$ есть векторная мера на T_1 со значениями в F_1. В частности, если g — непрерывная конечная числовая функция на T, то $f \mapsto m(gf)$ есть векторная мера на T со значениями в F, обозначаемая gm; если h — вторая непрерывная конечная числовая функция на T, то $g\,(hm) = (gh)\,m$.

3) Так как пространство $\mathcal{K}(T)$ есть индуктивный предел банаховых пространств $\mathcal{K}(T, K)$ и, в частности, бочечно (Топ. вект. простр., гл. III, § 1, следствие предложения 1 и предложение 2), то для того, чтобы линейное отображение m пространства $\mathcal{K}(T)$ в F было векторной мерой, необходимо и достаточно, чтобы $z' \circ m$ при любом $z' \in F'$ было скалярной мерой на T (Топ. вект. простр., гл. IV, § 4, предложение 1 и следствие предложения 7).

4) Вследствие замечания 1 предложение 1 § 3 главы III и его доказательство остаются справедливыми и для векторных мер. Значит, можно снова определить *носитель* векторной меры m на T как дополнение наибольшего открытого множества $U \subset T$, обладающего тем свойством, что сужение m на U равно нулю.

2. *Интегрирование относительно векторной меры*

Пусть m — векторная мера на T со значениями в F. Для любого $z' \in F'$ отображение $z' \circ m$ есть скалярная мера на T, линейно зависящая от z'. Пусть f — числовая функция, определенная на T; мы будем сокращенно говорить, что пара (f, m) обладает свойством P, если для любого $z' \in F'$ пара $(f, |z' \circ m|)$ обладает свойством P. Так, мы будем говорить, что f *существенно интегрируема относительно* m, если для любого $z' \in F'$ функция f существенно интегрируема относительно $|z' \circ m|$, или, что

то же, если f существенно интегрируема относительно каждой из мер $(z' \circ m)^+$ и $(z' \circ m)^-$ (гл. V, § 3, следствие 1 предложения 6).

Предложение 1. *Пусть m — векторная мера на T со значениями в F, а f — числовая функция на T, существенно интегрируемая относительно m. Отображение*

$$z' \mapsto \int f d(z' \circ m)^+ - \int f d(z' \circ m)^-$$

есть линейная форма на F'.

Обозначим это отображение через Φ. То, что $\Phi(\lambda z') = \lambda\Phi(z')$ при любом $\lambda \in \mathbf{R}$, очевидно, и остается показать, что $\Phi(y' + z') = \Phi(y') + \Phi(z')$. Положим $\mu = |y' \circ m| + |z' \circ m|$; тогда, согласно теореме Лебега—Никодима, можем написать $y' \circ m = g\mu$ и $z' \circ m = h\mu$, где g и h — ограниченные локально μ-интегрируемые числовые функции (гл. V, § 5, теорема 2); кроме того, имеем $(y' \circ m)^+ = g^+\mu$ и $(y' \circ m)^- = g^-\mu$ и аналогичные соотношения с заменой y' на z' (соотв. $y' + z'$), а g на h (соотв. $g + h$). Теперь ясно, что f существенно μ-интегрируема (гл. V, § 3, следствие 1 предложения 6), и доказываемое соотношение сводится к очевидному равенству $(g+h)^+ - (g+h)^- = (g^+ - g^-) + (h^+ - h^-)$.

Определение 2. *Пусть m — векторная мера на T со значениями в F, а f — числовая функция на T, существенно интегрируемая относительно m. Интегралом от f относительно m называется, и обозначается $m(f)$ или $\int f\,dm$, а также $\int f(t)\,dm(t)$, элемент из F'^*, определяемый формулой*

$$\left\langle z', \int f\,dm \right\rangle = \int f d(z' \circ m)^+ - \int f d(z' \circ m)^-. \qquad (1)$$

Заметим, что если $f \in \mathscr{K}(T)$, то так определенный элемент $\int f\,dm$ совпадает с элементом, так же обозначенным в n° 1, ибо тогда правая часть формулы (1) есть $\int f d(z' \circ m) = z'(m(f))$ по определению. Кроме того, если, в частности, применить определение 2 к случаю $F = \mathbf{R}$, то для любого $z' \in F'$ функция f будет существенно интегрируемой относительно действительной меры $z' \circ m$ и правую часть формулы (1) можно будет записать в виде $\int f d(z' \circ m)$.

Предположим, что f существенно интегрируема относительно $\boldsymbol{m}$, и пусть $z' \in F'$. Положим $\mu = |z' \circ \boldsymbol{m}|$; в силу теоремы Лебега — Никодима, $z' \circ \boldsymbol{m} = g\mu$, где g локально μ-интегрируема и $\|g\| \leqslant 1$, и доказательство предложения 1 показывает, что $\int f d(z' \circ \boldsymbol{m}) = \int fg\, d\mu$. Следовательно,

$$\left| \int f d(z' \circ \boldsymbol{m}) \right| \leqslant \int |f|\, d\, |z' \circ \boldsymbol{m}|. \tag{2}$$

Ясно, что множество всех конечных числовых функций, существенно интегрируемых относительно $\boldsymbol{m}$, есть векторное пространство над $\mathbf{R}$; примем обозначение $\mathscr{L}(\boldsymbol{m})$ для этого пространства, наделенного слабейшей локально выпуклой топологией, оставляющей непрерывными все линейные формы $f \longmapsto \int fd(z' \circ \boldsymbol{m})$, где z' пробегает F'. Отметим, что вообще локально выпуклое пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{m})$ *неотделимо*.

Пример. Возьмем в качестве $\boldsymbol{m}$ тождественное отображение $\mathscr{K}(T)$ на себя. Так как сопряженное к $\mathscr{K}(T)$ есть пространство $\mathfrak{M}(T)$ всех скалярных мер на T, то $\mathscr{L}(\boldsymbol{m})$ состоит из тех функций f, которые существенно интегрируемы относительно *каждой* скалярной меры μ (см. упражнение 1), а интеграл $\int f\, d\boldsymbol{m}$ есть линейная форма $\mu \longmapsto \int f\, d\mu$ на $\mathfrak{M}(T)$. Равенство $\int f\, d\mu = 0$ для всех мер $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ может выполняться лишь при $f = 0$, в чем убеждаемся, беря $\mu = \varepsilon_t$, где t — произвольная точка из T; иначе говоря, отображение $f \longmapsto \int f\, d\boldsymbol{m}$ есть *инъекция* пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{m})$ в алгебраическое сопряженное к $\mathfrak{M}(T)$, продолжающая тождественное отображение $\mathscr{K}(T)$ на себя. Следовательно, отношение $\int f\, d\boldsymbol{m} \in F = \mathscr{K}(T)$ равносильно отношению $f \in \mathscr{K}(T)$.

Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства F в отделимое локально выпуклое пространство G; сохраним обозначение u и для его продолжения путем образования второго сопряженного до линейного отображения F'^* в G'^* (§ 1, n° 1). При этом соглашении имеем

Предложение 2. *Всякая числовая функция f, существенно интегрируемая относительно $\boldsymbol{m}$, существенно интегрируема относительно $u \circ \boldsymbol{m}$, и $\int f d(u \circ \boldsymbol{m}) = u\left(\int f\, d\boldsymbol{m}\right)$.*

Предложение очевидно, если принять во внимание равенство $y' \circ u \circ \boldsymbol{m} = {}^t u(y') \circ \boldsymbol{m}$ для каждого $y' \in G'$.

Вообще, если $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{m})$, то интеграл $\int f\, d\boldsymbol{m}$ принадлежит F'^*, но не F (см. пример выше). Однако,

Предложение 3. *Если образ при отображении $\boldsymbol{m}$ множества тех $f \in \mathcal{K}(T)$, для которых $\sup_{t \in T} |f(t)| \leqslant 1$, слабо относительно компактен в F, то $\int f\, d\boldsymbol{m} \in F$ для любой ограниченной числовой функции f, существенно интегрируемой относительно $\boldsymbol{m}$.*

Пусть A — множество тех $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{m})$, для которых $\sup_{t \in T} |f(t)| \leqslant 1$, и $B = A \cap \mathcal{K}(T)$; множество $\boldsymbol{m}(B)$, по условию, слабо относительно компактно в F, и, значит, достаточно показать, что $\boldsymbol{m}(A)$ содержится в замыкании (в F'^*) множества $\boldsymbol{m}(B)$ относительно топологии $\sigma(F'^*, F')$; а поскольку $\boldsymbol{m}(B)$ выпукло и уравновешено, то достаточно доказать, что поляра множества $\boldsymbol{m}(B)$ в F' содержится в поляре множества $\boldsymbol{m}(A)$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, предложение 3). Но для того чтобы линейная форма $z' \in F'$ принадлежала $(\boldsymbol{m}(B))^\circ$, необходимо и достаточно, чтобы $|\langle z', \boldsymbol{m}(g)\rangle| = \left|\int g d(z' \circ \boldsymbol{m})\right| \leqslant 1$ для каждой функции $g \in B$, что означает, что скалярная мера $|z' \circ \boldsymbol{m}|$ ограничена и ее норма не превосходит 1 (гл. III, § 2, предложение 3); а согласно формуле (2), последнее условие влечет, что $|\langle z', \boldsymbol{m}(f)\rangle| \leqslant 1$ для каждой функции $f \in A$, откуда $z' \in (\boldsymbol{m}(A))^\circ$.

Следствие 1. *Если для любого компактного множества K из T образ при отображении $\boldsymbol{m}$ множества тех $f \in \mathcal{K}(T, K)$, для которых $\sup_{t \in T} |f(t)| \leqslant 1$, слабо относительно компактен в F, то $\int f\, d\boldsymbol{m} \in F$ для любой ограниченной функции $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{m})$ с компактным носителем, и $\int f\, d\boldsymbol{m} \in F''$ для любой функции $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{m})$.*

Первое утверждение непосредственно следует из предложения 3: если f ограничена и имеет компактный носитель, а U — относительно компактная открытая окрестность носителя функции f, то сужение m на подпространство $\mathscr{K}(U)$ есть мера m_U на U, удовлетворяющая условиям предложения 3, и имеем $\int f\,dm_U = \int f\,dm$ (гл. V, § 7, теорема 1), а значит, $\int f\,dm \in F$.

Пусть теперь f — произвольная функция из $\mathscr{L}(m)$; для каждого компактного множества K из T и каждого целого $n > 0$ обозначим через $f_{n,K}$ числовую функцию на T, определенную следующим образом: если $t \notin K$, то $f_{n,K}(t) = 0$; если $t \in K$ и $|f(t)| \leqslant n$, то $f_{n,K}(t) = f(t)$; наконец, если $t \in K$ и $|f(t)| > n$, то $f_{n,K}(t) = \frac{nf(t)}{|f(t)|}$. Ясно, что $f(t)$ при любом $t \in T$ есть предел функций $f_{n,K}(t)$ по фильтру — произведению фильтра Фреше на фильтр сечений упорядоченного (фильтрующегося по возрастанию) множества всех компактных подмножеств из T. А так как $|f_{n,K}| \leqslant |f|$, то из теоремы Лебега и предложения 8 § 2 главы V, примененных к каждой скалярной мере $|z' \circ m|$, вытекает, что $f_{n,K}$ сходится к f в $\mathscr{L}(m)$ по указанному фильтру. Следовательно, интеграл $\int f\,dm$ является точкой прикосновения в F'^* (в топологии $\sigma(F'^*, F')$) множества M всех $m(f_{n,K})$. Но первая часть следствия показывает, что $M \subset F$, а с другой стороны, для любого $z' \in F'$ имеем $|\langle z', m(f_{n,K})\rangle| \leqslant \int |f|\,d|z' \circ m|$, чем доказано, что M ограничено в F_σ, а значит, и в F (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, теорема 3). Тогда лемма 1 § 1 показывает, что $\int f\,dm \in F''$.

Следствие 2. *Если F полурефлексивно, то $\int f\,dm \in F$ для любой числовой функции f, существенно интегрируемой относительно m.*

3. *Мажорируемые векторные меры*

Пусть q — полунепрерывная снизу полунорма на F. Обозначим через A'_q множество $z' \in F'$, для которых $|\langle z', x\rangle| \leqslant q(x)$ при любом $x \in F$. Это — поляра в F' множества тех $x \in F$, для которых $q(x) \leqslant 1$; для любого $x \in F$ справедливо равенство $q(x) = \sup\limits_{z' \in A'_q} |\langle x, z'\rangle|$.

Определение 3. *Пусть* m — *векторная мера на* T *со значениями в* F *и* q — *полунепрерывная снизу полунорма на* F; *говорят, что* m q-*мажорируема, если существует такая положительная мера* μ, *что* $|z' \circ m| \leqslant \mu$ *для любого* $z' \in A'_q$; *тогда верхняя грань мер* $|z' \circ m|$, *где* z' *пробегает* A'_q (гл. III, § 2, теорема 3), *обозначается* $q(m)$. *Говорят, что* m *мажорируема, если она* q-*мажорируема для любой непрерывной полунормы* q *на* F.

Если обе меры m и m' q-мажорируемы, то, очевидно, их сумма $m + m'$ также q-мажорируема и

$$q(m + m') \leqslant q(m) + q(m').$$

Когда F — нормированное пространство, с нормой, обозначаемой $|x|$, утверждение, что m мажорируема, означает, следовательно, что меры $|z' \circ m|$, где $|z'| \leqslant 1$, мажорируются одной и той же положительной мерой; в этом случае через $|m|$ обозначается верхняя грань этого семейства мер.

Если $F = \mathbf{R}$, то мера $|m|$, соответствующая евклидовой норме $|x|$ на $\mathbf{R}$, совпадает с мерой, обозначенной через $|m|$ в n° 4 § 2 главы III.

Предложение 4. *Пусть* $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — *конечное семейство отделимых локально выпуклых пространств,* $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$ — *их произведение,* q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — *полунепрерывная снизу полунорма на* F_i *и* q — *полунорма на* F, *определяемая формулой* $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i)$. *Если* m_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — q_i-*мажорируемая векторная мера на* T *со значениями в* F_i, *то мера* $m = (m_1, \ldots, m_n)$ *со значениями в* F q-*мажорируема.*

В самом деле, сопряженное пространство F' отождествимо с $\prod_{i=1}^{n} F'_i$ так, что если $x = (x_i) \in F$ и $z' = (z'_i) \in F'$, то $\langle x, z' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, z'_i \rangle$. Если $|\langle x, z' \rangle| \leqslant q(x)$ для всех $x \in F$, то, в частности, $|\langle x_i, z'_i \rangle| \leqslant q_i(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и так как обратное очевидно, то множество A'_q есть произведение множеств A'_{q_i}. А так как,

по условию, $|z'_i \circ m_i| \leqslant q_i(m_i)$ для $z'_i \in A'_{q_i}$, то заключаем, что

$$|z' \circ m| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z'_i \circ m_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i(m_i)$$

для любого $z' \in A'_q$, и предложение доказано.

Следствие. *Если пространство F конечномерно, то всякая векторная мера m со значениями в F мажорируема. Для того чтобы числовая функция была существенно интегрируема относительно m, необходимо и достаточно, чтобы она была существенно интегрируема относительно $|m|$ (где $|x|$ означает произвольную норму на F).*

Предложение 5. *Пусть q — полунепрерывная снизу полунорма на F. Пусть, далее, m — q-мажорируемая мера и f — существенно интегрируемая относительно m функция, для которой $\int f\,dm \in F$. Тогда*

$$q\left(\int f\,dm\right) \leqslant \overline{\int}^{*} |f|\,dq(m).$$

Действительно, в силу формулы (1) и соотношения $|z' \circ m| \leqslant q(m)$ для $z' \in A'_q$, имеем

$$q\left(\int f\,dm\right) = \sup_{z' \in A'_q} \left|\left\langle z', \int f\,dm\right\rangle\right| \leqslant \sup_{z' \in A'_q} \int |f|\,d\,|z' \circ m| \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\int}^{*} |f|\,dq(m).$$

Предложение 6. *Пусть F — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство и m — мажорируемая мера на T со значениями в F. Если числовая функция f существенно интегрируема относительно всех мер $q(m)$ (где q пробегает множество всех непрерывных полунорм на F), то f существенно интегрируема относительно m и $\int f\,dm \in F$.*

Нам понадобится следующий вспомогательный результат. Пусть $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ — фильтрующееся по возрастанию семейство положительных мер на T. Обозначим через $\mathscr{L}^1((\mu_\iota)_{\iota \in I})$ векторное пространство всех конечных числовых функций на T, существенно μ_ι-интегрируемых при каждом $\iota \in I$, наделенное топологией, определяемой

полунормами $f \mapsto \mu_\iota(|f|)$ ($\iota \in \mathrm{I}$). Пусть, далее, $\mathscr{L}_0$ — векторное подпространство пространства $\mathscr{L}^1((\mu_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}})$, порожденное произведениями $g\varphi_K$, где g пробегает множество всех непрерывных конечных функций на T, а K — все компактные подмножества из T.

Лемма 1. *Если $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{K}(T)$ наделены топологией, индуцированной топологией пространства $\mathscr{L}^1((\mu_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}})$, то:*

a) *всякий элемент из $\mathscr{L}_0$ есть точка прикосновения некоторого ограниченного множества из $\mathscr{K}(T)$;*

b) *всякий элемент из $\mathscr{L}^1((\mu_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}})$ есть точка прикосновения некоторого ограниченного множества из $\mathscr{L}_0$.*

Для доказательства утверждения а) можно ограничиться случаем элемента вида $f = g\varphi_K$ ($g \in \mathscr{C}(T)$, K компактно в T). Непосредственно ясно (в силу теоремы Урысона), что f — точка прикосновения множества B функций вида gh, где h пробегает все непрерывные отображения T в $[0, 1]$, равные 1 на K и 0 на дополнении некоторой фиксированной компактной окрестности H множества K. Кроме того, множество B ограничено, ибо $\mu_\iota(|gh|) \leqslant \mu_\iota(|g\varphi_H|)$ для любой функции h, обладающей указанными свойствами.

Теперь докажем b): можно ограничиться случаем элемента $f \geqslant 0$ из $\mathscr{L}^1((\mu_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}})$. Для любого $\iota \in \mathrm{I}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K(\iota, \varepsilon)$ в T, что сужение f на $K(\iota, \varepsilon)$ непрерывно и $\mu_\iota(|f - f\varphi_{K(\iota,\varepsilon)}|) \leqslant \varepsilon$. Ясно, что f — точка прикосновения множества C всех $f\varphi_{K(\iota,\varepsilon)}$ ($\iota \in \mathrm{I}$, $\varepsilon > 0$). В силу теоремы Урысона, множество C содержится в $\mathscr{L}_0$; кроме того, оно ограничено, так как $\mu_\varkappa(f\varphi_{K(\iota,\varepsilon)}) \leqslant \mu_\varkappa(f)$, каковы бы ни были $\iota \in \mathrm{I}$, $\varkappa \in \mathrm{I}$ и $\varepsilon > 0$.

Перейдем к доказательству предложения 6: для любой функции $g \in \mathscr{K}(T)$ и любой непрерывной полунормы q на F имеем $q\left(\int g\,dm\right) \leqslant \int |g|\,d(q(m))$ (предложение 5), откуда вытекает, что отображение $g \mapsto \int g\,dm$ пространства $\mathscr{K}(T)$ в F непрерывно при наделении $\mathscr{K}(T)$ топологией, индуцированной топологией пространства $\mathscr{L}^1((q(m))_{q\in Q})$ (где Q — множество всех непрерывных полунорм на F). Следовательно, в силу предыдущей леммы и предложения 8 из Топ. вект. простр., гл. III, § 2, это отобра-

жение продолжается по непрерывности сначала до непрерывного линейного отображения v_0 пространства $\mathcal{L}_0$ в F, а затем до непрерывного линейного отображения v пространства $\mathcal{L}^1((q(\boldsymbol{m}))_{q \in Q})$ в F. При этом для любого $z' \in F'$ соотношение $\langle z', v(f)\rangle = \int fd(z' \circ \boldsymbol{m})$ справедливо по определению v для всех $f \in \mathcal{K}(T)$; а поскольку $|z' \circ \boldsymbol{m}| \leqslant q(\boldsymbol{m})$ для $q(z) = |\langle z', z\rangle|$, то отображение $f \mapsto \int fd(z' \circ \boldsymbol{m})$ непрерывно на $\mathcal{L}^1((q(\boldsymbol{m}))_{q \in Q})$, и значит, имеем снова, по непрерывности, соотношение $\langle z', v(f)\rangle = \int fd(z' \circ \boldsymbol{m})$ для любой функции $f \in \mathcal{L}^1((q(\boldsymbol{m}))_{q \in Q})$. Отсюда следует, что $v(f) = \int f\,d\boldsymbol{m}$, и предложение доказано.

4. *Векторные меры с базисом* μ

Определение 4. *Пусть μ — положительная мера на T. Векторная мера $\boldsymbol{m}$ на T со значениями в F называется мерой с базисом μ, если существует отображение $\boldsymbol{f}$ пространства T в F, скалярно локально μ-интегрируемое и такое, что $\boldsymbol{m}(g) = \int g\boldsymbol{f}\,d\mu$ для каждой функции $g \in \mathcal{K}(T)$. Тогда $\boldsymbol{f}$ называют плотностью меры $\boldsymbol{m}$ относительно μ и пишут $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f}\mu$.*

Очевидно, если $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ — плотности меры $\boldsymbol{m}$ относительно μ, то $\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2$ скалярно локально μ-пренебрежимо (гл. V, § 5, следствие 2 предложения 5); напомним, что из этого, вообще говоря, не следует, что $\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2$ равно нулю локально почти всюду (см. § 1, упражнение 12 и n° 1, замечание 2).

Пусть $\boldsymbol{m}$ — мера с басисом μ и плотностью $\boldsymbol{f}$. Для того чтобы числовая функция g была существенно интегрируема относительно $\boldsymbol{m}$, необходимо и достаточно, чтобы $g\boldsymbol{f}$ было скалярно существенно μ-интегрируемо (гл. V, § 3, теорема 1).

Предложение 7. *Пусть отображение $\boldsymbol{f}$, скалярно локально интегрируемое относительно некоторой положительной меры μ на T, таково, что $\int g\boldsymbol{f}\,d\mu \in F$ для каждой функции $g \in \mathcal{K}(T)$.*

Тогда отображение $g \mapsto \int gf\,d\mu$ *пространства* $\mathcal{K}(T)$ *в* F *есть векторная мера на* T *с базисом* μ *и плотностью* f *относительно* μ.

Действительно (n° 1, замечание 3), достаточно показать, что если положить $m(g) = \int gf\,d\mu$, то $z' \circ m$ будет скалярной мерой при любом $z' \in F'$. Но так как $z'(m(g)) = \int g\langle z', f\rangle\,d\mu$, то $z' \circ m = \langle z', f\rangle\,\mu$, откуда и следует наше утверждение.

Предложение 8. *Пусть* μ — *положительная мера на* T, *а* m — *мера на* T *со значениями в* F *с базисом* μ *и плотностью* f *относительно* μ. *Пусть, далее,* q — *полунепрерывная снизу полунорма на* F.

a) *Если для каждого компактного множества* K *из* T *верхний интеграл* $\int_K^* (q \circ f)\,d\mu$ *конечен, то* m q*-мажорируема.*

b) *Если* m q*-мажорируема, то* $q(m)$ *имеет базис* μ; *если, кроме того,* f μ*-измеримо как отображение* T *в* F_σ, *то* $q \circ f$ *локально* μ*-интегрируемо и* $q(m) = (q \circ f)\,\mu$.

a) Для любого конечного множества $J \subset A'_q$ обозначим через λ_J верхнюю грань мер $|z' \circ m|$, где z' пробегает J; если $g_J = \sup\limits_{z' \in J} |\langle z', f\rangle|$, то $\lambda_J = g_J\mu$ (гл. V, § 5, предложение 5). Для любого относительно компактного открытого множества U из T обозначим через $\lambda_{J,U}$ сужение λ_J на U; покажем сначала, что семейство $(\lambda_{J,U})$, где J пробегает фильтрующееся множество $\mathfrak{F}$ всех конечных подмножеств из A'_q, мажорировано в $\mathfrak{M}(U)$. Действительно, для любой функции $h \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(U)$ имеем

$$\int h\,d\lambda_{J,U} = \int hg_J\,d\mu \leqslant \int^* (q \circ f)\,h\,d\mu \leqslant \|h\| \int_U^* (q \circ f)\,d\mu,$$

откуда и следует наше утверждение (гл. II, § 2, n° 2). Пусть ν_U — верхняя грань этого семейства в $\mathfrak{M}(U)$. Если U' — второе относительно компактное открытое множество в T, причем $U \subset U'$, то ν_U есть сужение $\nu_{U'}$ на U, как это сразу вытекает из выражения для верхней грани фильтрующегося по возрастанию множества мер (гл. II, § 2, n° 2) и того, что $\lambda_{J,U}$ есть сужение $\lambda_{J,U'}$ на U. Следовательно, имеется, и притом только одна, положи-

тельная мера ν, сужением которой на каждое U служит ν_U (гл. III, § 3, предложение 1), и ясно, что $\nu = q(m)$.

b) Так как λ_J — меры с базисом μ, то этим свойством обладает и их верхняя грань $q(m)$ (гл. V, § 5, теорема 2). Если f μ-измеримо в топологии $\sigma(F, F')$ пространства F, то, как сразу следует из определений, отображение $t \mapsto (g_J(t))_{J \in \mathfrak{F}}$ пространства T в пространство-произведение $\mathbf{R}^{\mathfrak{F}}$ μ-измеримо; а так как семейство (g_J) фильтруется по возрастанию, то отображение $q \circ f = \sup\limits_{J \in \mathfrak{F}} g_J$ μ-измеримо и для любого компактного множества K из T имеем $\int_K^* (q \circ f)\, d\mu = \sup\limits_J \int_K g_J\, d\mu \leqslant \int_K dq(m)$ (гл. V, § 2, предложение 9). Но это доказывает, что $q \circ f$ локально μ-интегрируемо и $\lambda_J \leqslant$ $\leqslant (q \circ f)\mu \leqslant q(m)$ при любом $J \in \mathfrak{F}$; а отсюда, по определению, $q(m) = (q \circ f)\mu$.

Замечание. Предположим, что в A'_q существует счетное множество D, плотное в топологии $\sigma(F', F)$; тогда функция $q \circ f$ всегда μ-измерима, ибо $q(f(t)) = \sup\limits_{z' \in D} |\langle z', f(t)\rangle|$ (гл. IV, § 5, следствие 1 теоремы 2). В таком случае для любого компактного множества K из T имеем $\int_K^* (q \circ f)\, d\mu = \sup\limits_J \int_K g_J\, d\mu$, где J пробегает счетное фильтрующееся множество всех конечных подмножеств из D (гл. IV, § 1, следствие теоремы 3); мы видим, таким образом, что в этом случае выполнение условия $\int_K^* (q \circ f)\, d\mu < +\infty$ для любого компактного множества K из T необходимо и достаточно для того, чтобы m было q-мажорируемо.

Предложение 9. *Пусть F — конечномерное банахово пространство. Всякая мера m на T со значениями в F есть мера с базисом $|m|$. Если $m = f|m|$, то $|f(t)| = 1$ локально почти всюду относительно $|m|$. Для того чтобы m было мерой с базисом μ, необходимо и достаточно, чтобы $|m|$ было мерой с базисом μ, и если $m = g\mu$, то $|m| = |g|\mu$.*

Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис пространства F и $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — сопряженный базис пространства F'. Так как $|e'_i \circ m| \leqslant |m|$ для любого

индекса i, то (гл. V, § 5, теорема 2) $e'_i \circ \boldsymbol{m} = h_i |\boldsymbol{m}|$, где h_i ограничены и $|\boldsymbol{m}|$-измеримы. Тогда $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{h} |\boldsymbol{m}|$, где $\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$. Если $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f} |\boldsymbol{m}|$, то предложение 8 показывает, что $|\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{f}| |\boldsymbol{m}|$, откуда $|\boldsymbol{f}(t)| = 1$ локально почти всюду относительно $|\boldsymbol{m}|$ (гл. V, § 5, следствие 2 предложения 5). Последнее утверждение сразу вытекает из предложения 8.

Замечание. Если $\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$, то $|\boldsymbol{z}| = \psi(z_1, \ldots, z_n)$ есть положительно однородная непрерывная функция на $\mathbf{R}^n$. Положив $\mu_i = e'_i \circ \boldsymbol{m} = h_i |\boldsymbol{m}|$, по определению (гл. V, § 5, n° 9), получим

$$\psi(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \psi(h_1, \ldots, h_n) |\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{h}| |\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{m}|.$$

5. *Теорема Данфорда — Петтиса*

Пусть μ — положительная мера на T. Говорят, что векторная мера $\boldsymbol{m}$ на T со значениями в F имеет *скалярно базис* μ, если $\boldsymbol{z}' \circ \boldsymbol{m}$ для любого $\boldsymbol{z}' \in F'$ есть скалярная мера с базисом μ. Если векторная мера $\boldsymbol{m}$ со значениями в F имеет базис μ, то она и скалярно имеет базис μ: в самом деле, если $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f}\mu$, то $\boldsymbol{z}' \circ \boldsymbol{m} = \langle \boldsymbol{z}', \boldsymbol{f} \rangle \mu$ при любом $\boldsymbol{z}' \in F'$. Но существуют векторные меры, имеющие скалярно базис μ и не являющиеся мерами с базисом μ (упражнение 17), а с другой стороны, существуют векторные меры, не имеющие скалярно базиса ν ни для какой положительной меры ν; отметим, однако, что всякая *мажорируемая* мера $\boldsymbol{m}$ со значениями в *нормированном пространстве*, в силу теоремы Лебега — Никодима, имеет скалярно базис $|\boldsymbol{m}|$.

Пример. Возьмем в качестве $\boldsymbol{m}$ тождественное отображение $\mathscr{K}(T)$ на себя. Утверждение, что $\boldsymbol{m}$ имеет скалярно базис μ, означает, что всякая действительная мера на T есть мера с базисом μ. В частности, точечная мера ε_t ($t \in T$) должна быть мерой с базисом μ, что возможно лишь когда $\mu(\{t\}) > 0$ при любом $t \in T$, и влечет, в частности, что всякое компактное множество в T *счетно*.

В этом n° мы докажем результат, обобщающий одно из следствий теоремы Лебега — Никодима, а именно, что сопряженное к $L^1(\mu)$ есть $L^\infty(\mu)$ (гл. V, § 5, теорема 4), и дающий достаточное условие того, чтобы векторная мера, имеющая скалярно базис μ, была мерой с базисом μ.

Пусть π — каноническое отображение $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ на $L^\infty(\mu)$. Будем говорить, что векторное подпространство G пространства L^∞ *подъемно*, если существует такое его линейное отображение ρ в $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ (называемое *подъемом* G), что $\pi \circ \rho$ тождественно на G и $|\rho(f)(t)| \leqslant N_\infty(f)$ для всех $t \in T$ и $f \in G$.

Можно доказать, что если μ — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, то все пространство $L^\infty(\mathbf{R}^n, \mu)$ подъемно (упражнение 18).

Лемма 2. *В банаховом пространстве $L^\infty(T, \mu)$ всякое сепарабельное подпространство G подъемно.*

По условию, в G существует счетное плотное подмножество H, являющееся векторным подпространством над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел; пусть (h_n) — (счетный) базис H над $\mathbf{Q}$. Для каждого целого n обозначим через h'_n какой-либо элемент из $\mathscr{L}^\infty$ такой, что $\pi(h'_n) = h_n$, и пусть ρ' — $\mathbf{Q}$-линейное отображение H в $\mathscr{L}^\infty$, определяемое равенствами $\rho'(h_n) = h'_n$; ясно, что $\pi \circ \rho$ тождественно на H. При этом для любого $h \in H$ всюду, кроме точек t некоторого локально пренебрежимого множества $A(h)$, выполняется неравенство $|\rho'(h)(t)| \leqslant N_\infty(h)$. Пусть A — объединение всех множеств $A(h)$ $(h \in H)$; оно снова локально пренебрежимо. Для каждого $h \in H$ обозначим через $\rho(h)$ функцию $h'' \in \mathscr{L}^\infty$, определяемую условиями $h''(t) = \rho'(h)(t)$, если $t \notin A$, и $h''(t) = 0$, если $t \in A$. Ясно, что ρ есть такое Q-линейное отображение H в подпространство $\mathscr{B}$ всех ограниченных функций из $\mathscr{L}^\infty$, что $\pi \circ \rho$ тождественно на H и $|\rho(h)(t)| \leqslant N_\infty(h)$ для всех $h \in H$ и $t \in T$. А так как $\mathscr{B}$ есть банахово пространство с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in T} |f(t)|$ (гл. IV, § 5, теорема 2), то ρ продолжается до непрерывного $\mathbf{R}$-линейного отображения G в $\mathscr{B}$, очевидно, являющегося подъемом G.

Определение 5. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство и F'_s — его сопряженное, наделенное топологией $\sigma(F', F)$. Через $\mathscr{L}^\infty_{F'_s}$ обозначается векторное пространство таких отображений f пространства T в F'_s, что f скалярно μ-измеримо и равно скалярно почти всюду (относительно μ) отображению T в*

некоторое равностепенно непрерывное подмножество из F'. Через $L^{\infty}_{F'_s}$ обозначается факторпространство пространства $\mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$ по пространству всех скалярно локально μ-пренебрежимых отображений T в F'_s.

Когда F удовлетворяет условиям предложения 13 § 1, функции из $\mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$ μ-измеримы в слабой топологии $\sigma(F', F)$, но не обязательно измеримы относительно сильной топологии в F', даже если F — банахово пространство (§ 1, упражнение 17). При тех же условиях, скалярно локально μ-пренебрежимые отображения T в F'_s совпадают с локально μ-пренебрежимыми отображениями T в F'_s (§ 1, замечание 2).

Когда F — сепарабельное нормированное пространство, элементами пространства $\mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$ служат μ-измеримые отображения f пространства T в F'_s, для которых $|f|$ *ограничено по мере*; в этом случае можно определить в пространстве $L^{\infty}_{F'_s}$ структуру нормированного пространства, наделив его нормой N_{∞} (гл. IV, § 6, n° 3).

Лемма 3. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство и f — элемент из $\mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$. Для каждого $z \in F$ имеем $\langle z, f\rangle \in \mathcal{L}^{\infty}$, и линейное отображение $z \mapsto \pi(\langle z, f\rangle)$ пространства F в L^{∞} непрерывно; если к тому же F — нормированное пространство, то*

$$N_{\infty}(\langle z, f\rangle) \leqslant |z| \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

Из определения ясно, что функция $\langle z, f\rangle$ μ-измерима и ограничена по мере; заменив, если нужно, f функцией, принадлежащей к тому же классу в $L^{\infty}_{F'_s}$, можно, кроме того, считать, что $f(T) \subset V^{\circ}$, где V — некоторая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в F (что изменит $\langle z, f\rangle$ лишь на локально пренебрежимом множестве, зависящем от z). Тогда отношение $z \in V$ будет влечь неравенство $|\langle z, f(t)\rangle| \leqslant 1$ при любом $t \in T$, чем доказана непрерывность отображения $z \mapsto \pi(\langle z, f\rangle)$. Последнее утверждение леммы очевидно.

Лемма 4. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство и f — элемент из $\mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$. Для любой числовой функции $g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ функция gf скалярно существенно μ-интегрируема и $\int gf\,d\mu \in F'$.*

Действительно, для любого $z \in F$ функция $\langle z, f\rangle$ принадлежит $\mathcal{L}^{\infty}$, откуда следует первое утверждение. Кроме того, можно, не изменяя $\int gf\,d\mu$, считать, что $f(T) \subset V^{\circ}$, где V — некоторая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в F. Тогда отношение $z \in V$ влечет неравенство $|\langle z, f(t)\rangle| \leqslant 1$ для любого $t \in T$, откуда $\left|\left\langle z, \int gf\,d\mu\right\rangle\right| = \left|\int \langle z, f\rangle g\,d\mu\right| \leqslant \overline{N}_1(g)$, чем доказано, что $\int gf\,d\mu \in F'$.

Теорема 1. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, содержащее всюду плотное счетное подмножество. Для каждой функции $f \in \mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$ и каждого $z \in F$ положим $v_f(z) = \pi(\langle z, f\rangle) \in L^{\infty}$; отображение $f \mapsto v_f$ определяет факторизацией линейную биекцию пространства $L^{\infty}_{F'_s}$ на пространство $\mathcal{L}(F; L^{\infty})$ всех непрерывных линейных отображений F в L^{∞}. Если F — нормированное пространство, то эта биекция является изометрией.*

В силу леммы 3, первое утверждение будет доказано, если мы покажем, что для любого непрерывного отображения u пространства F в L^{∞} существует такая функция $f \in \mathcal{L}^{\infty}_{F'_s}$, что $\pi(\langle z, f\rangle) = u(z)$ при всех $z \in F$ и что класс f в $L^{\infty}_{F'_s}$ определяется этим условием однозначно. Второе утверждение очевидно, ибо если $\pi(\langle z, f\rangle) = \pi(\langle z, f_1\rangle)$ для каждого $z \in F$, то разность $f_1 - f$ скалярно локально пренебрежима. С другой стороны, существует подъем ρ подпространства $u(F)$ в $\mathcal{L}^{\infty}$ (лемма 2). Для любого $t \in T$ отображение $z \mapsto \rho(u(z))(t)$ есть непрерывная линейная форма на T, то есть элемент $f(t)$ пространства F'. Функция f скалярно μ-измерима, поскольку $\langle z, f\rangle = \rho(u(z)) \in \mathcal{L}^{\infty}$ для любого $z \in F$; имеем $\pi(\langle z, f\rangle) = u(z)$; наконец, для любого $t \in T$ и любого z, принадлежащего прообразу V единичного шара пространства L^{∞}

относительно отображения u, имеем

$$|\langle z, f(t)\rangle| = |\rho(u(z))(t)| \leqslant N_\infty(u(z)) \leqslant 1,$$

чем доказано, что $f(t) \in V^\circ$ для каждого $t \in T$.

Если, к тому же, F — нормированное, то изложенное показывает, что $\sup_{t \in T} |f(t)| \leqslant \|u\|$. Однако с другой стороны (лемма 3),

$$N_\infty(u(z)) \leqslant |z| \sup_{t \in T} |f(t)|,$$

и это неравенство сохраняется при произвольном изменении f на локально пренебрежимом множестве. Отсюда заключаем, что $\|u\| = N_\infty(|f|)$.

Следствие 1. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, содержащее всюду плотное счетное подмножество. Для каждой функции $f \in \mathscr{L}^\infty_{F'_s}$, каждого $z \in F$ и каждой функции $g \in \mathscr{L}^1$ положим $\Phi_f(z, g) = \int \langle z, f(t)\rangle g(t)\, d\mu(t)$. Отображение $f \longmapsto \Phi_f$ определяет факторизацией линейную биекцию пространства $L^\infty_{F'_s}$ на пространство $\mathscr{B}(F, L^1)$ всех непрерывных билинейных форм на $F \times L^1$. Если F — нормированное пространство, то эта биекция является изометрией.*

В самом деле, можно предполагать, что $f(T)$ — равностепенно непрерывное подмножество из F'. Тогда ясно, что Φ_f раздельно непрерывно, и (принимая во внимание, что L^∞ есть пространство, сопряженное к L^1 (гл. V, § 5, теорема 4)) в обозначениях теоремы 1 и Приложения имеем ${}^l\Phi_f = v_f$. Теперь следствие вытекает из теоремы 1 в силу предложения 1 Приложения и его следствия.

Следствие 2 (Теорема Данфорда — Петтиса). *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, содержащее всюду плотное счетное подмножество. Для каждой функции $f \in \mathscr{L}^\infty_{F'_s}$ и каждой функции $g \in \mathscr{L}^1$ положим $w_f(\widetilde{g}) = \int gf\, d\mu \in F'$* (лемма 4). *Отображение $f \longmapsto w_f$ определяет факторизацией линейную биекцию пространства $L^\infty_{F'_s}$ на пространство $\mathscr{R}(L^1, F')$ тех линейных отображений и пространства L^1 в F', при которых образ единичного шара является равностепенно непрерывным множеством в F.*

Если F — нормированное пространство (в этом случае $\mathscr{R}(L^1, F')$ — пространство всех непрерывных линейных отображений L^1 в сильное сопряженное к F), то биекция $f \mapsto w_f$ есть изометрия.

Поскольку L^∞ — сопряженное к L^1, это вытекает из предыдущего следствия, предложения 1 Приложения и его следствия.

Замечание. Ясно, что отображение $u \in \mathscr{R}(L^1, F')$ непрерывно в любой $\mathfrak{S}$-топологии пространства F' (где $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства F его ограниченными подмножествами). Обратно, если, кроме того, предположить что F *бочечно*, то всякое непрерывное линейное отображение L^1 в F', наделенное $\mathfrak{S}$-топологией, переводит единичный шар пространства L^1 в ограниченное и, следовательно, равностепенно непрерывное множество в F' (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 2).

Следствие 3. *Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, содержащее всюду плотное счетное подмножество, и m — векторная мера на T со значениями в слабом сопряженном F' к F. Если образ при отображении m множества B тех функций g из $\mathscr{K}(T)$, для которых $\mu(|g|) \leqslant 1$, содержится в замкнутом выпуклом равностепенно непрерывном подмножестве H' из F', то m есть мера с базисом μ и обладает такой плотностью f относительно μ, что $f(t) \in H'$ при всех $t \in T$.*

Из условия вытекает, что m непрерывно при наделении $\mathscr{K}(t)$ топологией, индуцированной топологией пространства $\mathscr{L}^1(\mu)$ (определяемой полунормой N_1); следовательно, m продолжается до непрерывного линейного отображения u пространства $\mathscr{L}^1(\mu)$ в пополнение G слабого сопряженного к F; но так как H' — компактное множество в G, а образ при отображении u множества B тех $f \in \mathscr{L}^1$, для которых $N_1(f) \leqslant 1$, содержится в замыкании множества H' в G, то $u(B) \subset H'$ и, значит, u отображает $\mathscr{L}^1$ в F'. А так как $N_1(f) \leqslant \varepsilon$ влечет $u(f) \in \varepsilon H'$, то $u(g) = 0$ для μ-пренебрежимых g, и, стало быть, к отображению L^1 в F', полученному факторизацией из u, можно применить следствие 2, что и приводит к утверждаемому результату.

Следствие 4. *Пусть F — сепарабельное нормированное пространство и m — мера на T со значениями в сильном сопряженном F', мажорируемая нормой последнего. Тогда m — мера с базисом $|m|$, и если $m = f|m|$, то $|f(t)| = 1$ локально почти всюду относительно $|m|$.*

Действительно, по условию, для любого $z \in F$, такого, что $|z| \leqslant 1$, имеем $|\langle z, m(g)\rangle| \leqslant |m|(|g|)$ для всякой функции $g \in \mathscr{K}(T)$, и, значит, $|m(g)| \leqslant |m|(|g|)$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 5, предложение 4). А так как всякий шар в F' равностепенно непрерывен, то применимо следствие 3, показывающее, что m — мера с базисом $|m|$; кроме того, если $m = f|m|$, то f $|m|$-измерима в топологии $\sigma(F', F)$ (§ 1, предложение 13) и $|m| = |f||m|$ (предложение 8), чем следствие и доказано (гл. V, § 5, следствие 2 предложения 5).

Применив это следствие к случаю конечномерного F, вновь получим в качестве частного случая первую часть предложения 9.

6. *Сопряженное к пространству L^1_F (F — сепарабельное банахово пространство)*

Предложение 10. *Пусть F — сепарабельное банахово пространство. Для любой функции $f \in \overline{\mathscr{L}}^1_F$ и любой функции $g \in \mathscr{L}^\infty_{F'_s}$ числовая функция $\langle f, g\rangle$: $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ существенно μ-интегрируема и*

$$\left|\int \langle f, g\rangle\, d\mu\right| \leqslant \overline{N}_1(f)\, N_\infty(g). \tag{3}$$

Пусть $\theta(\dot{g})$ для любого класса $\dot{g} \in L^\infty_{F'_s}$ означает непрерывную линейную форму на L^1_F, полученную факторизацией из линейной формы $f \mapsto \int \langle f, g\rangle\, d\mu$ на $\overline{\mathscr{L}}^1_F$; тогда θ есть линейная изометрия пространства $L^\infty_{F'_s}$ на сильное сопряженное $(L^1_F)'$ к банахову пространству L^1_F.

Для любого компактного множества K из T, и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное $K' \subset K$, что $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$ и сужение f (соотв. g) на K' есть непрерывное отображение K' в F (соотв. в F'_s); следовательно, множество $g(K')$ слабо компактно и, значит, равностепенно непрерывно в F' (Топ. вект. простр., гл. IV, § 5, n° 1). Но сужение определенной на $F \times F'$ канонической билинейной формы на произведение пространства F и равностепенно непрерывного множества из F' непрерывно в произведении топологий пространства F и $\sigma(F', F)$ (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, следствие 4 предложения 1); отсюда заключаем, что сужение

$\langle f, g\rangle$ на K' непрерывно, и, следовательно, функция $\langle f, g\rangle$ μ-измерима. Кроме того,

$$|\langle f(t), g(t)\rangle| \leqslant |f(t)|\,|g(t)| \leqslant |f(t)|\,N_\infty(g)$$

локально почти всюду, а значит, $\langle f, g\rangle$ существенно μ-интегрируема и справедливо неравенство (3) (гл. IV, § 5, теорема 5 и гл. V, § 2, предложение 5).

Остается показать, что θ — сюръективная изометрия. Пусть u — непрерывная линейная форма на L_F^1. Отображение $(\tilde{h}, z) \longmapsto u(\widetilde{hz})$ есть непрерывная билинейная форма на $L^1 \times F$, ибо

$$|u(\widetilde{hz})| \leqslant \|u\|\,N_1(hz) \leqslant \|u\|\,|z|\,N_1(h).$$

В силу следствия 1 теоремы 1, существует такое отображение g пространства T в F', принадлежащее $L^\infty_{F'_s}$, что $|g(t)| \leqslant \leqslant \|u\|$ при всех $t \in T$ и $u(\widetilde{hz}) = \int \langle hz, g\rangle\, d\mu$ для любой функции $h \in \mathscr{L}^1$ класса $\tilde{h}$ в L^1 и любого $z \in F$. Иными словами, линейные формы u и $\theta(\dot{g})$ совпадают на подпространстве пространства L_F^1, порожденном элементами вида $\widetilde{hz}$ $(\tilde{h} \in L^1,\ z \in F)$. А так как это подпространство плотно в L_F^1 (гл. IV, § 3, предложение 10), то, следовательно, $u = \theta(\dot{g})$, чем уже доказано, что θ сюръективно. Кроме того, на основании (3) имеем $\|\theta(\dot{g})\| \leqslant N_\infty(g) \leqslant \|u\| = \|\theta(\dot{g})\|$, откуда $\|\theta(\dot{g})\| = N_\infty(g)$, что и завершает доказательство.

7. *Интегрирование вектор-функции относительно векторной меры*

Предложение 11. *Пусть F, G, H — банаховы пространства и Φ — непрерывное билинейное отображение $F \times G$ в H. Пусть, далее, m — мажорируемая векторная мера на T со значениями в G. Тогда существует, и притом единственное, непрерывное линейное отображение $I_{\Phi, m}$ пространства $\overline{\mathscr{L}}_F^1(|m|)$ в H, такое, что $I_{\Phi, m}(hz) = \Phi\left(z, \int h\, dm\right)$ для любого $z \in F$ и любой*

интегрируемой относительно $|m|$ *числовой функции* h. *При этом*

$$|I_{\Phi, m}(f)| \leqslant \|\Phi\| \int |f| \, d|m| \tag{4}$$

для любой функции $f \in \overline{\mathscr{L}}^1_F(|m|)$.

Если такое отображение существует, то его значение для *размещенной* на $|m|$-интегрируемых множествах функции f однозначно определено: в самом деле, как известно, в этом случае можно написать, что $f = \sum\limits_i a_i \varphi_{X_i}$, где X_i $|m|$-интегрируемы и попарно не пересекаются, а $a_i \in F$ (гл. IV, § 4, лемма 1). Стало быть, значение $I_{\Phi, m}(f)$ должно быть равно $\sum\limits_i \Phi\left(a_i, \int \varphi_{X_i} \, dm\right)$. Но (предложение 6)

$$\left|\sum_i \Phi\left(a_i, \int \varphi_{X_i} \, dm\right)\right| \leqslant \|\Phi\| \sum_i |a_i| \, |m|(X_i) = \\ = \|\Phi\| \int |f| \, d|m|, \tag{5}$$

чем прежде всего доказано, что элемент $\sum\limits_i \Phi\left(a_i, \int \varphi_{X_i} \, dm\right)$ пространства H не зависит от выражения функции f в виде $\sum\limits_i a_i \varphi_{X_i}$, так что его можно записать в виде $I_{\Phi, m}(f)$. Легко видеть, что так определенное отображение $I_{\Phi, m}$ линейно на пространстве $\mathscr{E}_F$ всех размещенных на $|m|$-интегрируемых множествах функций: действительно, достаточно представить две функции f и g из $\mathscr{E}_F$ в форме $f = \sum\limits_i a_i \varphi_{X_i}$ и $g = \sum\limits_i b_i \varphi_{X_i}$ с одним и тем же конечным семейством попарно не пересекающихся $|m|$-интегрируемых множеств X_i (что возможно на основании леммы 1 § 4 гл. IV). Тогда неравенство (5) показывает, что $I_{\Phi, m}$ непрерывно на $\mathscr{E}_F$, а так как это подпространство всюду плотно в $\overline{\mathscr{L}}^1_F$ (гл. IV, § 4, следствие 1 предложения 16 и гл. V, § 2, предложение 6), то отсюда вытекают существование и единственность $I_{\Phi, m}$, равно как и неравенство (4).

$I_{\Phi, m}(f)$ *называется интегралом от* f *относительно* m (по отношению к билинейному отображению Φ); когда значение билинейного отображения Φ в точке (x, y) обозначается xy, вместо $I_{\Phi, m}(f)$ пишем $\int f \, dm$.

В обозначениях n° 6, интеграл $\int \langle f, g\rangle\, d\mu$ есть не что иное, как $I_{\Phi, m}(f)$ с $\Phi(x, x') = \langle x, x'\rangle$ и $m = g\mu$.

Следствие. *Если m и m' — мажорируемые меры на T со значениями в G, то $I_{\Phi, m+m'} = I_{\Phi, m} + I_{\Phi, m'}$ и $I_{\Phi, \lambda m} = \lambda I_{\Phi, m}$ для любого скаляра λ.*

Второе утверждение очевидно. Первое же означает, что для любой функции f, одновременно $|m|$- и $|m'|$-интегрируемой, выполняется равенство

$$I_{\Phi, m+m'}(f) = I_{\Phi, m}(f) + I_{\Phi, m'}(f). \tag{6}$$

Но тогда функция f $(|m| + |m'|)$-интегрируема (гл. V, § 3, предложение 6 и его следствие 1), а значит, тем более, и $(|m + m'|)$-интегрируема, так что левая часть формулы (6) имеет смысл. Доказательство этой формулы достаточно провести для случая, когда f — размещенная на $(|m| + |m'|)$-интегрируемых множествах функция, поскольку множество этих функций плотно в $\mathscr{L}^1_F(|m| + |m'|)$, а обе части формулы (6) непрерывны на этом последнем пространстве в силу (4). Но для $f = a\varphi_X$, где X $(|m| + |m'|)$-интегрируемо, обе части формулы (6) приводятся к выражению $\Phi\left(a, \int \varphi_X\, dm\right) + \Phi\left(a, \int \varphi_X\, dm'\right)$, и следствие доказано.

Замечание. Когда m имеет вид $b\mu$, где $b \in G$, а μ — действительная мера на T, то

$$I_{\Phi, m}(f) = \int \Phi(f(t), b)\, d\mu(t)$$

для любой функции $f \in \mathscr{L}^1_F(\mu)$, так как обе части непрерывны на этом пространстве и совпадают, когда f — размещенная на $|\mu|$-интегрируемых множествах функция.

8. Комплексные меры

Определение 6. *Комплексной мерой на T называется всякая непрерывная линейная форма на комплексном пространстве $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$.*

Таким образом, пространство $\mathfrak{M}_{\mathbf{C}}(T)$ комплексных мер на T есть *сопряженное* к отделимому локально выпуклому пространству $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$.

Если m — комплексная мера на T, то ее сужение на $\mathscr{K}(T)$ есть векторная мера на T со значениями в $\mathbf{C}$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbf{R}$); этим сужением мера m вполне определена, так как если $f = f_1 + if_2 \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$, то и действительная часть f_1, и мнимая часть f_2 функции f принадлежат $\mathscr{K}(T)$, а $m(f) = m(f_1) + im(f_2)$. Обратно, для любой векторной меры m_0 на T со значениями в $\mathbf{C}$ формула $m(f) = m_0(f_1) + im_0(f_2)$ определяет, и притом однозначно, комплексную меру m, сужение которой на $\mathscr{K}(T)$ равно m_0. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять комплексную меру с ее сужением на $\mathscr{K}(T)$; такая мера m имеет вид $m = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 и μ_2 — действительные меры на T, называемые соответственно *действительной* и *мнимой частью* меры m.

Носитель меры m есть замыкание объединения носителей мер μ_1 и μ_2. Как мы знаем, m мажорируема (следствие предложения 4); будем называть *абсолютным значением* меры m положительную меру $|m|$, соответствующую абсолютному значению $|x_i + ix_2| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ на $\mathbf{C}$. Имеем $|m| = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2}$ (n° 4, замечание после предложения 9) и $|\mu_1| \leqslant |m|$, $|\mu_2| \leqslant |m|$, $|m| \leqslant |\mu_1| + |\mu_2|$; кроме того, m — мера с базисом $|m|$, и можно написать $m = h|m|$, где $h \in \mathscr{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(|m|)$ и $|h(t)| = 1$ локально почти всюду относительно $|m|$ (предложение 9). Меры m и $|m|$ имеют один и тот же носитель.

Для любого отображения f пространства T в комплексное банахово пространство F, существенно интегрируемого относительно $|m|$, можно определить (n° 7) интеграл от f относительно m (соответствующий $\mathbf{R}$-билинейному отображению $(x, \lambda) \mapsto \lambda x$ произведения $F \times \mathbf{C}$ в F), который будет обозначаться $\int f\,dm$; из свойства единственности в предложении 11 сразу вытекает, что (в предыдущих обозначениях) $\int f\,dm = \int f\,d\mu_1 + i \int f\,d\mu_2 = \int fh\,d|m|$. Следовательно, для $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$ имеем $m(f) = \int f\,dm$. Отображение f называется существенно интегрируемым относительно m, если оно обладает этим свойством относительно $|m|$; так же определяются m-интегрируемые, m-измеримые, локально m-интегрируемые, m-пренебрежимые, локально m-пренебрежимые

отображения. Вместо $\mathcal{L}_F^p(T, |m|)$ (соотв. $\overline{\mathcal{L}}_F^p(T, |m|)$, $L_F^p(T, |m|)$) пишем $\mathcal{L}_F^p(T, m)$ (соотв. $\overline{\mathcal{L}}_F^p(T, m)$, $L_F^p(T, m)$); это — комплексные векторные пространства.

Для того чтобы отображение f было m-интегрируемо (соотв. существенно m-интегрируемо), необходимо и достаточно, чтобы f было интегрируемо (соотв. существенно интегрируемо) относительно каждой из четырех мер μ_1^+, μ_1^-, μ_2^+, μ_2^-, что следует из неравенств, связывающих $|m|$, $|\mu_1|$, $|\mu_2|$, и соотношений $|\mu_k| = \mu_k^+ + \mu_k^-$ $(k=1, 2)$ (гл. V, § 3, следствие 1 предложения 6).

Если f существенно m-интегрируемо (соотв. m-интегрируемо), то $|f|$ существенно $|m|$-интегрируемо (соотв. $|m|$-интегрируемо), и из предложения 11 вытекает, что

$$\left|\int f\,dm\right| \leqslant \int |f|\,d|m|. \tag{7}$$

Пусть F и G — комплексные банаховы пространства, а u — непрерывное линейное отображение пространства F в G. Если f — существенно m-интегрируемое (соотв. m-интегрируемое) отображение T в F, то $u \circ f$ существенно m-интегрируемо (соотв. m-интегрируемо) и $\int (u \circ f)\,dm = u\left(\int f\,dm\right)$; это сразу вытекает из предыдущего и аналогичного предложения для существенно $|m|$-интегрируемых функций (гл. IV, § 4, теорема 1 и гл. V, § 2, предложение 5).

Пусть m — комплексная мера на T и h — комплексная локально m-интегрируемая функция. Для любой функции $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{C}}(T)$ функция fh m-интегрируема и отображение $f \longmapsto \int fh\,dm$ есть комплексная мера, обозначаемая $h \cdot m$ и называемая мерой *плотности* h относительно m. Если $m = g \cdot |m|$, то ясно, что $h \cdot m = hg \cdot |m|$; так как при этом $|g(t)| = 1$ локально почти всюду относительно $|m|$, то для того, чтобы f была существенно интегрируема относительно $n = h \cdot m$, необходимо и достаточно, чтобы fh была существенно m-интегрируема, и $\int f\,dn = \int (fh)\,dm$. Кроме того, $|h \cdot m| = |h| \cdot |m|$. Всякая мера вида $h \cdot m$ называется также комплексной мерой *с базисом* m; комплексные меры m и m' называются *эквивалентными*, если каждая из них имеет некоторую плотность относительно другой, или, что то же, если $m' = h \cdot m$,

где h локально m-интегрируема и $h(t) \neq 0$ локально почти всюду относительно $|m|$. Ясно, что m и $|m|$ эквивалентны и что для того, чтобы m и m' были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эквивалентными были $|m|$ и $|m'|$.

Если m и m' — комплексные меры на T и f — функция со значениями в комплексном банаховом пространстве F, существенно интегрируемая (соотв. интегрируемая) одновременно относительно m и m', то, каковы бы ни были комплексные числа λ и λ', функция f существенно интегрируема (соотв. интегрируема) относительно $\lambda m + \lambda' m'$ и

$$\int f d(\lambda m + \lambda' m') = \lambda \int f\, dm + \lambda' \int f\, dm'.$$

Действительно, это вытекает из следствия предложения 11. Кроме того, из определений вытекает, что

$$|\lambda m + \lambda' m'| \leqslant |\lambda|\,|m| + |\lambda'|\,|m'|.$$

Мерой, сопряженной к комплексной мере m, называется комплексная мера $\overline{m}$, определяемая равенством $\overline{m}(f) = \overline{m(\overline{f})}$ для всех $f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$. Если $m = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 и μ_2 — действительные меры, то $\overline{m} = \mu_1 - i\mu_2$ и $|\overline{m}| = |m|$; если $m = h \cdot |m|$, то $\overline{m} = \overline{h} \cdot |m|$. Если f — существенно m-интегрируемая (соотв. m-интегрируемая) функция с комплексными значениями, то $\overline{f}$ существенно $\overline{m}$-интегрируема (соотв. $\overline{m}$-интегрируема) и

$$\int \overline{f}\, d\overline{m} = \overline{\int f\, dm}.$$

Предложение 12. *Пусть m — комплексная мера на T, а p и q — сопряженные показатели* (гл. IV, § 6, n° 4). *Билинейная форма $(f, g) \mapsto \int fg\, dm$ определена и непрерывна на произведении $\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(m) \times \mathscr{L}^q_{\mathbf{C}}(m)$; справедливо неравенство $\left|\int fg\, dm\right| \leqslant N_p(f)\, N_q(g)$, и $N_q(g)$ есть норма непрерывной линейной формы на $L^p_{\mathbf{C}}(m)$, полученной факторизацией из линейной формы $f \mapsto \int fg\, dm$.*

Кроме того, если $1 \leqslant p < +\infty$, то всякая непрерывная линейная форма на комплексном пространстве $\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(m)$ имеет вид $f \mapsto \int fg\, dm$, где g — функция из $\mathscr{L}^q_{\mathbf{C}}(m)$, класс которой в $L^q_{\mathbf{C}}(m)$ вполне определен.

Так как $m = h \cdot |m|$, где $|h(t)| = 1$ локально почти всюду, то первое утверждение сразу вытекает из неравенства Гельдера (гл. IV, § 6, теорема 2); второе следует из предложения 3 § 6 главы IV. Наконец, если u — непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}$, то ее сужение на (действительное) подпространство $\mathscr{L}^p$ пространства $\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}$ есть $\mathbf{R}$-линейное непрерывное отображение пространства $\mathscr{L}^p$ в $\mathbf{C}$; следовательно, если $1 \leqslant p < +\infty$, то оно имеет вид $f \mapsto \int f g_1 \, d|m| + i \int f g_2 \, d|m|$, где g_1 и g_2 принадлежат $\mathscr{L}^q$ (гл. V, § 5, теорема 4); отсюда, положив $g = (g_1 + i g_2) h^{-1}$, получаем последнее утверждение.

9. *Ограниченные комплексные меры*

Для каждой комплексной меры m на T положим

$$\|m\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1,\ f \in \mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)} |m(f)|.$$

m называется *ограниченной*, если $\|m\| < +\infty$; это сводится к утверждению, что m непрерывна на $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$, наделенном топологией равномерной сходимости, и, значит, продолжается до непрерывной линейной формы (с нормой $\|m\|$) на банаховом пространстве $\overline{\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)}$ всех непрерывных комплексных функций, стремящихся к 0 на бесконечности.

Лемма 5. *Пусть m — комплексная мера на T и f — комплексная m-интегрируемая функция. Имеем* $\int |f| \, d|m| = \sup \left| \int f h \, dm \right|$, *где h пробегает множество тех функций из $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$, для которых $|h(t)| \leqslant 1$ при всех $t \in T$.*

Если $m = g \cdot |m|$, то $\int |f| \, d|m| = \int |fg| \, d|m|$ и $\int f h \, dm = \int f g h \, d|m|$. Положим $\zeta(t) = 0$, когда $f(t) g(t) = 0$, и

$$\zeta(t) = \frac{f(t) g(t)}{|f(t) g(t)|},$$

когда $f(t) g(t) \neq 0$; функция ζ $|m|$-измерима, и, значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество K в T, что $\int_{T-K} |f| \, d|m| \leqslant \varepsilon$, сужение ζ на K непрерывно и $|\zeta(t)| = 1$

на K. Следовательно, в силу теоремы Урысона, существует такая непрерывная комплексная функция ζ_1 на T, что $\zeta_1 = \zeta$ на K, а $|\zeta_1(t)| \leqslant 2$ и $\zeta_1(t) \neq 0$ для каждого $t \in T$. Положим $h(t) = \frac{\zeta_1(t)}{|\zeta_1(t)|}$; легко видеть, что h непрерывна на T, совпадает с ζ на K и $|h(t)| = 1$ при всех $t \in T$. Наконец, пусть u — непрерывное отображение T в $[0, 1]$, равное 1 на K и имеющее компактный носитель; положив $h_1 = h^{-1}u$, получим

$$\left| \int fh_1\,dm - \int |f|\,d|m| \right| \leqslant 2 \int\limits_{T-K} |f|\,d|m| \leqslant 2\varepsilon,$$

и лемма доказана.

Предложение 13. *Пусть m — комплексная мера и $\mu = |m|$. Для того чтобы m была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы μ была ограничена, и тогда $\|m\| = \|\mu\|$.*

$m = g \cdot \mu$, где g — такая μ-измеримая мера, что $|g(t)| = 1$ при всех $t \in T$. Если μ ограничена, то для любой функции $g \in \mathscr{K}_C(T)$

$$|m(f)| = \left| \int fg\,d\mu \right| \leqslant N_\infty(fg)\,\|\mu\| = \|f\|\,\|\mu\|,$$

а значит, m ограничена и $\|m\| \leqslant \|\mu\|$. Если теперь ограничена m, то, в силу леммы 5, для любой функции $f \in \mathscr{K}_C(T)$ имеем

$$|\mu(f)| \leqslant \|f\|\,\|m\|,$$

так что m ограничена и $\|m\| \leqslant \|\mu\|$. Тем самым предложение доказано.

Следствие. *Пусть m — ограниченная комплексная мера. Тогда всякая функция $f \in \mathscr{L}_F^\infty(m)$ m-интегрируема и $\left|\int f\,dm\right| \leqslant N_\infty(f)\,\|m\|$.*

Действительно, f m-измерима; полагая $\mu = |m|$, имеем

$$\int^* |f|\,d\mu \leqslant N_\infty(f)\,\|\mu\| = N_\infty(f)\,\|m\|,$$

так что f $|m|$-интегрируема (гл. IV, § 5, теорема 5) и

$$\left| \int f\,dm \right| \leqslant \int |f|\,d\mu \leqslant N_\infty(f)\,\|m\|.$$

10. Образ комплексной меры; индуцированная комплексная мера; произведение комплексных мер

Пусть m — комплексная мера на T и π — отображение T в локально компактное пространство X. Будем говорить, что π *m-собственно*, если оно $|m|$-собственно (гл. V, § 6, определение 1); тогда непосредственно видно, что для любой функции $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{C}}(X)$ функция $f \circ \pi$ существенно m-интегрируема и

$$\left| \int (f \circ \pi)\, dm \right| \leqslant \int |f \circ \pi|\, d|m| = \int |f|\, d(\pi(|m|)), \tag{8}$$

так что отображение $f \mapsto \int (f \circ \pi)\, dm$ непрерывно на $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}(X)$, то есть является комплексной мерой на X; эта мера обозначается $\pi(m)$ и называется *образом* меры m при отображении π. Кроме того, из (8) следует, что $|\pi(m) \leqslant \pi(|m|)$. Если m и m' — комплексные меры на T и π одновременно m- и m'-собственно, то оно $(\lambda m + \lambda' m')$-собственно при любых комплексных скалярах λ, λ' и $\pi(\lambda m + \lambda' m') = \lambda \pi(m) + \lambda' \pi(m')$.

Пусть Y — локально компактное подпространство пространства T. Для каждой функции $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{C}}(Y)$ функция f' на T, определенная условиями $f'(t) = f(t)$, если $t \in Y$, и $f'(t) = 0$, если $t \notin Y$, m-интегрируема (гл. V, § 1, n° 1); ясно, что отображение $f \mapsto \int f'\, dm$ является комплексной мерой на Y; она называется *мерой, индуцированной* на Y мерой m, и обозначается m_Y. Ясно, что если $m = g \cdot |m|$, то $m_Y = g_Y \cdot |m|_Y$, где g_Y — сужение на Y функции g, локально интегрируемое относительно $|m|_Y$ (гл. V, § 7, n° 1); кроме того, так как $|g_Y| = 1$ локально почти всюду относительно $|m|_Y$ (гл. V, § 7, следствие 1 предложения 1), то $|m_Y| = |m|_Y$.

Пусть T и T' — локально компактные пространства и m (соотв. m') — комплексная мера на T (соотв. T'). Положим $m = g \cdot |m|$ и $m' = g' \cdot |m'|$. Функция $g \otimes g'$ локально интегрируема на $T \times T'$ относительно положительной меры $|m| \otimes |m'|$ (гл. V, § 8, следствие 5 предложения 5), и легко видеть, что если заменить g (соотв. g') функцией g_1 (соотв. g_1'), равной g (соотв. g')

локально почти всюду относительно $|m|$ (соотв. $|m'|$), то $g_1 \otimes g_1'$ будет равна $g \otimes g'$ локально почти всюду относительно $|m| \otimes \otimes |m'|$. Стало быть, комплексная мера $(g \otimes g')\cdot(|m| \otimes |m'|)$ на $T \times T'$ зависит лишь от m и m'; она обозначается $m \otimes m'$ и называется *произведением* мер m и m'. Так как $|g \otimes g'| = 1$ локально почти всюду относительно $|m| \otimes |m'|$ (гл. V, § 8, следствие 8 предложения 5), то $|m \otimes m'| = |m| \otimes |m'|$.

Читатель легко убедится в том, что все предложения, доказанные в главе V относительно образа положительной меры, меры, индуцированной положительной мерой, или произведения положительных мер, за исключением тех, в которые входят верхние или существенные верхние интегралы, остаются справедливыми при замене положительных мер произвольными комплексными мерами.

Наконец, как и в § 1, определяется понятие функции, *скалярно существенно m-интегрируемой* относительно комплексной меры m; для того чтобы функция f обладала этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы f была скалярно существенно интегрируема относительно $|\mu_1|$ и $|\mu_2|$, где μ_1 и μ_2 — действительная и мнимая части меры m, и тогда $\int f\,dm = \int f\,d\mu_1 + i\int f\,d\mu_2$. Предоставляем читателю переформулировать результаты § 1 для комплексных мер.

Упражнения

1) Показать, что для того, чтобы числовая функция f на T была существенно интегрируема относительно любой положительной меры на T, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена, имела компактный носитель и была измерима относительно любой положительной меры на T.

2) Пусть G — бочечное пространство, H — полурефлексивное пространство и F — пространство $\mathscr{L}_s(G; H)$. Пусть, далее, m — векторная мера на T со значениями в F. Показать, что $\int f\,dm \in F$ для любой числовой функции f, существенно интегрируемой относительно m. [Заметить, что F полурефлексивно.] Случай $H = \mathbf{R}$.

3) Пусть m — векторная мера на T со значениями в F. Показать, что для всякой числовой функции f, существенно интегрируемой относительно m, $\int f\,dm \in F''$ в каждом из следующих двух случаев: а) F — правильное [Топ. вект. простр., гл. IV, § 3, упражнение 10);

b) F — пространство Фреше, а T счетно в бесконечности. [В обоих случаях погрузить F в F'' и применить метод следствия 1 предложения 3; в случае b) использовать упражнение 21г) из Топ. вект. простр., гл. IV, § 3.]

4) Пусть $\boldsymbol{m}$ — векторная мера на T со значениями в F. Показать, что для всякой числовой функции $f \geqslant 0$, полунепрерывной снизу и существенно интегрируемой относительно $\boldsymbol{m}$, $\int f\, d\boldsymbol{m} \in F''$. [Воспользоваться теоремой 1 § 1 главы IV.]

5) Пусть F — полурефлексивное локально выпуклое пространство и $\boldsymbol{m}$ — мера на T со значениями в F. Показать, что для всякой числовой функции g, локально интегрируемой относительно $\boldsymbol{m}$, отображение $f \longmapsto \int fg\, d\boldsymbol{m}$ пространства $\mathscr{K}(T)$ в F есть мера на T; будем обозначать ее $g \cdot \boldsymbol{m}$. Для того чтобы числовая функция h была существенно интегрируема относительно $g \cdot \boldsymbol{m}$, необходимо и достаточно, чтобы gh была существенно интегрируема относительно $\boldsymbol{m}$, и тогда $\int h d(g \cdot \boldsymbol{m}) = \int hg\, d\boldsymbol{m}$.

6) Пусть F — полурефлексивное локально выпуклое пространство, наделенное такой структурой алгебры над $\mathbf{R}$, что отображение $(u, v) \longmapsto uv$ произведения $F \times F$ в F *раздельно непрерывно*. Пусть $\boldsymbol{m}$ — такая мера на T со значениями в F, что $\boldsymbol{m}(fg) = \boldsymbol{m}(f)\, \boldsymbol{m}(g)$ для всех f и g из $\mathscr{K}(T)$. Показать, что если числовые функции f и g таковы, что f, g и fg принадлежат $\mathscr{L}(\boldsymbol{m})$, то

$$\int fg\, d\boldsymbol{m} = \left(\int f\, d\boldsymbol{m}\right)\left(\int g\, d\boldsymbol{m}\right).$$

[Выделить предварительно случай $g \in \mathscr{K}(T)$ и рассмотреть две меры $f \longmapsto \boldsymbol{m}(fg)$ и $f \longmapsto \boldsymbol{m}(f)\, \boldsymbol{m}(g)$; перейти к общему случаю, применяя тот же метод и используя упражнение 5.] Случай, когда $F = \mathscr{L}(G)$, где G рефлексивно, а F — наделено топологией простой сходимости или топологией слабой простой сходимости.

7) Пусть μ — положительная мера на T и $\boldsymbol{m}$ — мера на T со значениями в F, имеющая базис μ и плотность $\boldsymbol{f}$ относительно μ. Пусть, далее, q — полунепрерывная снизу полунорма на F. Показать, что если для любого компактного множества K из T интеграл $\int_K^* (q \circ \boldsymbol{f})\, d\mu$ конечен, то для всякой μ-измеримой функции $h \geqslant 0$ справедливо неравенство $\overline{\int}^* h\, dq(\boldsymbol{m}) \leqslant \overline{\int}^* (q \circ \boldsymbol{f})\, h\, d\mu$. [Воспользоваться леммой 1 § 2 главы V.]

8) Пусть $\boldsymbol{m}$ — векторная мера на T со значениями в F, q — мажорируемая относительно полунепрерывной снизу полунормы q на F.

Показать, что для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(T)$ справедливо равенство

$$\int f d(q \circ \boldsymbol{m}) = \sup \sum_i q(\boldsymbol{m}(f_i)),$$

где (f_i) пробегает множество всех конечных последовательностей элементов из $\mathscr{K}(T)$, для которых $\sum_i |f_i| \leqslant f$. [Рассуждать как в теореме 1 § 2 главы II.]

9) Пусть T — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, F — отделимое бочечное пространство, содержащее всюду плотное счетное подмножество, и $\boldsymbol{m}$ — векторная мера на T со значениями в слабом сопряженном F' к F. Показать, что на T существует такая положительная мера μ, что $\boldsymbol{m}$ имеет скалярно базис μ. [Использовать предложение 12 § 5 главы V и условие c′) теоремы Лебега — Никодима (гл. V, § 5, теорема 2).]

*10) Пусть K — компактное пространство. Для всякого его отделимого факторпространства K_1 отождествим банахово пространство $\mathscr{C}(K_1)$ с замкнутым подпространством в $\mathscr{C}(K)$ посредством инъекции $f \longmapsto f \circ \pi$, где π — каноническое отображение K на K_1.

a) Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства $\mathscr{C}(K)$ в квазиполное отделимое локально выпуклое пространство F. Для того чтобы u переводило единичный шар пространства $\mathscr{C}(K)$ в множество из F, относительно компактное в топологии $\sigma(F, F')$, достаточно, чтобы для каждого *метризуемого* факторпространства K_1 пространства K сужение u на $\mathscr{C}(K_1)$ обладало тем же свойством. [Воспользоваться теоремой Эберлейна (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнение 15) и заметить, что всякая последовательность (f_n) в $\mathscr{C}(K)$ содержится в подпространстве $\mathscr{C}(K_1)$, где K_1 — метризуемое факторпространство пространства K; для этого рассмотреть непрерывное отображение $x \longmapsto (f_n(x))$ пространства K в $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.]

b) Для любого отделимого факторпространства K_1 пространства K сопряженным к канонической инъекции пространства $\mathscr{C}(K_1)$ в $\mathscr{C}(K)$ служит отображение $\mu \longmapsto \pi(\mu)$ пространства $\mathfrak{M}(K)$ в $\mathfrak{M}(K_1)$. Обозначим через $(\mathfrak{M}(K))'$ сопряженное к банахову пространству $\mathfrak{M}(K)$ (второе сопряженное к $\mathscr{C}(K)$). Для того чтобы множество $A \subset \mathfrak{M}(K)$ было относительно компактно в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), (\mathfrak{M}(K))')$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого метризуемого факторпространства K_1 пространства K канонический образ множества A в $\mathfrak{M}(K_1)$ был относительно компактен в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K_1), (\mathfrak{M}(K_1))')$. [Заметить, что A сильно ограничено; тогда можно предполагать, что A выпукло, уравновешено и замкнуто в широкой топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), \mathscr{C}(K))$ (применить в $\mathfrak{M}(K_1)$ упражнение 19 § 4 главы IV); следовательно, A есть образ единичного шара пространства F', сопряженного к банахову пространству F, при отображении u', сопряженном к некоторому непрерывному линейному отображению u пространства

$\mathscr{C}(K)$ в F (рассмотреть поляру множества A в $\mathscr{C}(K)$); после этого применить a).]

*11) Пусть F и G — отделимые локально выпуклые пространства, причем G квазиполно; пусть u — непрерывное линейное отображение F в G; так как его сопряженное ${}^t u$ сильно непрерывно, то второе сопряженное ${}^t({}^t u)$ есть сильно и слабо непрерывное линейное отображение F'' в G''. Показать равносильность следующих условий:

α) u переводит всякое ограниченное множество из F в множество, относительно компактное в топологии $\sigma(G, G')$.

β) ${}^t({}^t u)$ отображает F'' в G.

γ) ${}^t u$ непрерывно в топологиях $\sigma(G', G)$ и $\sigma(F', F'')$.

δ) ${}^t u$ переводит всякое равностепенное непрерывное множество из G' в множество, относительно компактное в топологии $\sigma(F', F'')$.

[Использовать тот факт, что всякое ограниченное множество из F относительно компактно в F'' в топологии $\sigma(F'', F')$. Чтобы показать, что δ) влечет γ), рассмотреть вначале случай, когда G полно, и воспользоваться теоремой 4 из Топ. вект. простр., гл. IV, § 2. Для перехода к общему случаю погрузить G в его пополнение и заметить, что всякая точка из F'' есть точка прикосновения, в топологии $\sigma(F'', F')$, для некоторого ограниченного множества из F.]

*12) a) Пусть K — компактное пространство и $E = E(K)$ — подпространство в $\mathbf{R}^K$, образованное всеми линейными комбинациями характеристических функций открытых множеств; будем отождествлять E с подпространством второго сопряженного к $\mathscr{C}(K)$. Показать, что последовательность Коши в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), E)$ сходится в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), (\mathfrak{M}(K))')$ [использовать предложение 12 и упражнение 17 § 5 главы V]. Вывести отсюда, что всякое множество $A \subset \mathfrak{M}(K)$, относительно компактное в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), E)$, относительно компактно в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), \mathfrak{M}(K))')$. [Свести к случаю, когда K метризуемо, воспользовавшись упражнением 10b. Показать, что A ограничено, применив упражнение 15 § 5 главы V. Отметить, что в A широкая топология $\sigma(\mathfrak{M}(K), \mathscr{C}(K))$ и топология $\sigma(\mathfrak{M}(K), \overline{E})$ совпадают, где $\overline{E} \supset \mathscr{C}(K)$ есть замыкание E в сильном сопряженном к $\mathfrak{M}(K)$; используя сепарабельность $\mathscr{C}(K)$, вывести отсюда, что из любой последовательности точек множества A можно извлечь последовательность Коши в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(K), E)$; для завершения доказательства привлечь теорему Эберлейна.]

b) Пусть T — локально компактное пространство и m — векторная мера на T со значениями в квазиполном отделимом локально выпуклом пространстве F. Предположим, что $\int_K dm \in F$ для каждого компактного подмножества K из T. Показать, что $\int f\, dm \in F$ для каждой ограниченной борелевской функции f на T с компактным

носителем и что образ при отображении $f \longmapsto \int f\, dm$ множества всех борелевских функций с носителем, содержащимся в некотором компактном подмножестве K из T, имеющих норму $\|f\| \leqslant 1$, относительно компактен в топологии $\sigma(F, F')$. [Использовать a) и упражнение 11, примененное к u: $f \longmapsto \int f\, dm$, где f пробегает множество всех линейных комбинаций характеристических функций компактных множеств из T].

c) Пусть F — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство и m — векторная мера на T со значениями в F, имеющая скалярно базис μ; далее, пусть $z' \circ m = g_{z'} \cdot \mu$ для каждого $z' \in F'$. Чтобы выполнялось условие b), необходимо и достаточно, чтобы для каждого компактного подмножества K из T, каждого равностепенно непрерывного множества H' из F' и каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что отношения $A \subset K$ и $\mu^*(A) \leqslant \delta$ влекут $\int_A^* |g_{z'}|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ для всех $z' \in H'$. [Использовать предыдущее упражнение 11 и упражнение 17 § 5 главы V.] В этом случае говорят, что m *абсолютно непрерывна* относительно μ (в исходной топологии пространства F). Всякая векторная мера со значениями в полурефлексивном пространстве, имеющая скалярно базис μ, абсолютно непрерывна относительно μ (следствие 2 предложения 3). Всякая мажорируемая векторная мера m со значениями в банаховом пространстве F абсолютно непрерывна относительно $|m|$ (в исходной топологии пространства F).

*13) Пусть G — отделимое бочечное пространство и $F = G'$ — его сопряженное; если m есть векторная мера на T со значениями в F при наделении F какой-либо топологией, согласующейся с двойственностью между F и G, то m останется векторной мерой и при наделении F топологией сильного сопряженного к G.

Предположим, что m имеет скалярно базис μ; тогда m абсолютно непрерывна относительно μ, если F наделено топологией $\tau(F, G)$ [упражнение 12c)]. Для того чтобы m была абсолютно непрерывна относительно μ, когда F наделено *сильной* топологией, необходимо и достаточно, чтобы для каждого компактного множества K из T и каждой последовательности (A_n) μ-измеримых подмножеств из K образ B при отображении m замыкания в $\mathscr{L}^1(\mu)$ множества всех размещенных функций с абсолютным значением, не превосходящим 1, на клан, порожденный последовательностью множеств A_n (гл. IV, § 4, n° 8), содержал счетное подмножество, плотное в сильной топологии пространства G'. [Для доказательства достаточности свести к случаю, когда $T = K$ есть стоуново пространство (гл. IV, § 4, упражнение 10). Затем рассуждать от противного: если (A_n) — последовательность открыто-замкнутых подмножеств из K, то, перейдя к метризуемому факторпространству K_1 пространства K (упражнение 10a),

можно предполагать, что непрерывные функции на K_1, соответствующие φ_{A_n}, образуют тотальное множество в $\mathscr{C}(K_1)$. С другой стороны, рассматривая факторпространство пространства G по подпространству, ортогональному к B, можно предполагать, что B тотально в $F = G'$ относительно топологии $\sigma(G', G)$; наше допущение влечет тогда, что всякое ограниченное множество C из G предкомпактно и метризуемо в топологии $\sigma(G, H)$, где H — подпространство в $F = G'$, порожденное множеством B. Следовательно, из любой ограниченной последовательности $(\mathbf{z}_n)$ точек пространства G можно выбрать подпоследовательность Коши в топологии $\sigma(G, H)$; показать, что если $(\mathbf{z}_n)$ — последовательность Коши в топологии $\sigma(G, H)$ и $\mathbf{z}_n \circ \boldsymbol{m} = g_{\mathbf{z}_n} \cdot \mu$, то последовательность классов функций $g_{\mathbf{z}_n}$ в $L^1(\mu)$ будет последовательностью Коши в топологии $\sigma(L', L^\infty)$; отсюда, наконец, вывести противоречие, воспользовавшись упражнениями 17 и 18 § 5 главы V.]

14) a) Пусть G—банахово пространство, $F = G'$—его сильное сопряженное и $\boldsymbol{g}$ — отображение T в F, принадлежащее пространству $\Lambda^p_{G'}$ (§ 1, упражнение 16). Показать, что если $p > 1$, то мера $\boldsymbol{g} \cdot \mu$ абсолютно непрерывна относительно μ (в сильной топологии пространства F).

b) Возьмем в качестве G банахово пространство $L^1(\mathbf{N})$, так что $G' = L^\infty(\mathbf{N})$; функция $\boldsymbol{f}$, определенная в упражнении 7a § 1 (рассматриваемая как функция со значениями в G'), скалярно вполне интегрируема, но мера $\boldsymbol{f} \cdot \mu$ не будет абсолютно непрерывной относительно μ в сильной топологии пространства G'.

*15) a) Пусть $\boldsymbol{f}$ — скалярно локально интегрируемое отображение пространства T в квазиполное отделимое локально выпуклое пространство F. Тогда $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f} \cdot \mu$ есть векторная мера со значениями в F'^* (в топологии $\sigma(F'^*, F')$). Показать, что если эта мера абсолютно непрерывна (в топологии равномерной сходимости на всех равностепенно непрерывных подмножествах из F') и если, кроме того, $\boldsymbol{f}$ *μ-измерима* (в исходной топологии пространства F), то $\boldsymbol{m}$ есть векторная мера со значениями в F. [Воспользоваться предложением 8 § 1.] Если F — банахово пространство и если для некоторого $p > 1$ функция $\langle \mathbf{z}', \boldsymbol{f} \rangle$ принадлежит $\overline{\mathscr{L}}^p(\mu)$ при всех $\mathbf{z}' \in F'$, то мера $\boldsymbol{m}$ абсолютно непрерывна [см. упражнение 14a].

b) Пусть $I = [0, 1]$ и f — такая (определенная с использованием гипотезы континуума) функция на $I \times I$, что $s \mapsto f(s, t)$ для каждого $t \in I$ есть характеристическая функция счетного множества, а $t \mapsto f(s, t)$ для каждого $s \in I$ есть характеристическая функция дополнения к счетному множеству [гл. V, § 8, упражнение 7c]. Обозначим через I_0 интервал I, наделенный дискретной топологией, и через F — банахово пространство $\mathscr{B}(I) = L^\infty(I_0)$ всех ограниченных функций на I; F отождествимо с пространством $\mathscr{C}(\widetilde{I}_0)$ всех непрерывных функций на компактификации Стоуна — Чеха пространства I_0. Для каждого $s \in I$ обозначим через $\boldsymbol{g}(s)$ элемент $t \mapsto f(s, t)$ простран-

ства F; показать, что g скалярно интегрируемо относительно меры Лебега μ на I, но $\int g\,d\mu$ не принадлежит F. Более точно, $g\cdot\mu$ есть векторная мера со значениями в F'', равная $c\mu$, где c — постоянный вектор, тождественно равный характеристической функции множества $\widetilde{I}_0 - I_0 = E$ (см. упражнение 12а). [Разбить каждую положительную меру на $\widetilde{I}_0$ на сумму атомической и рассеянной меры (гл. V, § 10, предложение 15) и заметить, что рассеянная мера сосредоточена в множестве E.] Вывести отсюда, что не существует ни одной μ-измеримой функции h со значениями в F, для которой функция $h - g$ была бы скалярно μ-пренебрежима [использовать а)].

16) Рассмотрим отображения u_m пространства $T = [0, 1]$ в сепарабельное гильбертово пространство, определенные в упражнении 1 § 1, и положим $f_k = u_1 + \ldots + u_k$; показать, что векторные меры $f_k\cdot\mu$ равномерно сходятся на каждом ограниченном множестве из $\mathscr{C}(T)$ к некоторой векторной мере m со значениями в F. При этом m продолжается по непрерывности на пространство $\mathscr{L}^2(\mu)$, и для любой функции $f \in \mathscr{L}^2$ имеем $\int f\,dm \in F$ и $\left|\int f\,dm\right| \leqslant N_2(f)$ в F; в частности, m имеет скалярно базис μ и абсолютно непрерывна относительно μ в сильной топологии (упражнение 12с). Однако m не будет иметь базис ν ни для какой положительной меры ν на T и тем более (следствие 4 теоремы 1) не будет мажорируемой. [Свести к случаю, когда ν имеет базис μ, пользуясь теоремой 3 § 5 главы V.]

17) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$; отображение $f \mapsto f\cdot\mu$ пространства $\mathscr{C}(T)$ в $\mathfrak{M}(T)$ непрерывно в сильной топологии пространства $\mathfrak{M}(T)$ и, следовательно, является векторной мерой m со значениями в этом банаховом пространстве. Показать, что m имеет скалярно базис μ и абсолютно непрерывна относительно μ в сильной топологии, но не является мерой с базисом μ (в сильной топологии пространства $\mathfrak{M}(T)$). [Заметить, что m имеет базис μ для широкой топологии $\sigma(\mathfrak{M}(T), \mathscr{C}(T))$, и вывести отсюда, что если бы $m = g\cdot\mu$, где g скалярно μ-интегрируемо (в сильной топологии пространства $\mathfrak{M}(T)$), то мы необходимо имели бы $g(t) = \varepsilon_t$ почти всюду. Показать, что это ведет к противоречию, заметив, что для любой ограниченной числовой функции θ на T линейная форма z': $\lambda \mapsto \sum_{t\in T}\theta(t)\lambda(\{t\})$ на $\mathfrak{M}(T)$ непрерывна, но $\langle g, z'\rangle$ не обязательно μ-измерима.]

*18) а) Пусть T — локально компактное пространство и (K_α) — локально конечное покрытие его компактными множествами. Пусть, далее, μ — положительная мера на T, а μ_α — мера, индуцированная μ на K_α. Предположим, что каждое из пространств $L^\infty(K_\alpha, \mu_\alpha)$ подъемно. Показать, что $L^\infty(T, \mu)$ подъемно.

b) Пусть K — метризуемое компактное пространство, μ — положительная мера на K и (ω_n) — фундаментальная последовательность

(гл. IV, § 5, упражнение 13) конечных разбиений K на интегрируемые множества. Для каждого интегрируемого подмножества A из K и каждого элемента $\widetilde{f} \in L^1(\mu)$ положим $\lambda_A(\widetilde{f}) = 0$, если $\mu(A) = 0$, и $\lambda_A(\widetilde{f}) = (\mu(A))^{-1} \int\limits_A f\,d\mu$ в противном случае; для каждого n положим $\rho_n(\widetilde{f}) = \sum\limits_k \lambda_{A_k}(\widetilde{f})\,\varphi_{A_k}$, если $\omega_n = (A_k)$. Показать, что последовательность $(\rho_n(\widetilde{f}))$ μ-интегрируемых функций сходится к f почти всюду. [Рассмотреть вначале случай, когда f — непрерывная функция. Затем, задав произвольно число $a > 0$, показать, что объединение B всех множеств A, принадлежащих по крайней мере одному из разбиений ω_n и таких, что $a\mu(A) \leqslant \int\limits_A f\,d\mu$, измеримо и таково, что $\mu(B) \leqslant a^{-1} \int f\,d\mu$. Далее, приблизить f в $\mathscr{L}^1$ последовательностью непрерывных функций.]

c) Показать, что всякое метризуемое компактное пространство подъемно. [Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в $\mathbf{N}$, мажорирующий фильтр Фреше; показать, что $\rho(\widetilde{f}) = \lim_{\mathfrak{U}} \rho_n(\widetilde{f})$ служит подъемом L^∞.]

d) Вывести из a) и c), что всякое метризуемое локально компактное пространство (для любой положительной меры) подъемно.

19) Пусть μ — такая мера на T, что банахово пространство $L^1(\mu)$ сепарабельно. Показать, что всякое непрерывное линейное отображение $L^1(\mu)$ в сильное сопряженное F' к произвольному банахову пространству F получается факторизацией из отображения вида $g \mapsto \int gf\,d\mu$, где $f \in \mathscr{L}^\infty_{F'_s}$. [Свести к теореме Данфорда — Петтиса, используя упражнение 7 из Топ. вект. простр., гл. IV, § 5.]

*20) Пусть F — сепарабельное пространство Фреше, F' — его сопряженное, μ — положительная мера на T и $\boldsymbol{m}$ — мера на T со значениями в слабом сопряженном F'_s, обладающая скалярно базисом μ. Для того чтобы $\boldsymbol{m}$ имела базис μ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого компактного множества K из T существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и образ при отображении $\boldsymbol{m}$ множества всех μ-измеримых ограниченных функций g с носителем в K_1, удовлетворяющих неравенству $\int |g|\,d\mu \leqslant 1$, есть равностепенно непрерывное множество в F'. [Вспомнить, что $\int g\,d\boldsymbol{m} \in F'$ для любой μ-измеримой ограниченной функции g с компактным носителем; см. следствие 2 предложения 3. Для доказательства необходимости условия воспользоваться предложениями 13 и 5 § 1. Для установления

достаточности условия рассмотреть вначале случай компактного T; применяя следствие 3 теоремы 1, показать, прежде всего, что имеются такое разбиение пространства T на пренебрежимое множество N и последовательность компактных множеств (K_n) и такое измеримое отображение $\boldsymbol{g}$ пространства T в F'_s, что $\int f\,d\boldsymbol{m} = \int \boldsymbol{g} f\,d\mu$ для любой функции $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$, обращающейся в нуль на дополнении к объединению конечного числа множеств K_n; для доказательства того, что $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{g}\cdot\mu$, использовать упражнения 18b и 22a § 5 главы V. Наконец, для перехода к случаю произвольного локального компактного пространства T воспользоваться предложением 4 § 1 главы V.]

*21) Пусть F — банахово пространство и u — непрерывная линейная форма на банаховом пространстве $L^p_F(T, \mu)$; обозначим через q показатель, сопряженный с p, и через $\mathscr{E}$ — пространство всех числовых размещенных функций на μ-интегрируемых множествах. Можно для $f \in \mathscr{L}^p$, $\boldsymbol{z} \in F$ написать $u(f\boldsymbol{z}) = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{m}(f)\rangle$, где $\boldsymbol{m}$ — такое непрерывное линейное отображение $\mathscr{L}^p$ в F', что $|\boldsymbol{m}(f)| \leqslant \|u\|\,N_p(f)$.

a) Пусть $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечная последовательность попарно не пересекающихся непренебрежимых μ-интегрируемых множеств. Показать, что

$$\sum_i \left(|\boldsymbol{m}(\varphi_{A_i})|^q/(\mu(A_i))^{q-1}\right) \leqslant \|u\|^q.$$

[Для каждой системы $(\boldsymbol{a}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ векторов из F с $|\boldsymbol{a}_i| = 1$ рассмотреть линейную форму $(\xi_i) \mapsto u\left(\sum_i \xi_i \boldsymbol{a}_i \varphi_{A_i}\right)$ на $\mathbf{R}^n$ и применить теорему 4 § 5 главы V к некоторой мере с конечным носителем.] Вывести отсюда, что если $A = \bigcup_i A_i$, то $\sum_i |\boldsymbol{m}(\varphi_{A_i})| \leqslant \|u\|\,(\mu(A))^{1/p}$ [применить неравенство Минковского].

b) Для каждой положительной функции $f \in \mathscr{E}$ положим $\nu(f) = \sup\left(\sum_i |\boldsymbol{m}(f\varphi_{A_i})|\right)$, где (A_i) пробегает все конечные последовательности попарно не пересекающихся μ-интегрируемых множеств. Показать, что ν есть сужение на $\mathscr{E}$ положительной меры с базисом μ (обозначаемой снова через ν) на T, для которой $|\boldsymbol{m}(f)| \leqslant \nu(f)$, какова бы ни была положительная функция $f \in \mathscr{E}$ [использовать a)].

c) Показать, что если F сепарабельно, то существует такое скалярно μ-интегрируемое отображение $\boldsymbol{g}$ пространства T в F', что $u(\tilde{\boldsymbol{f}}) = \int \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle\,d\mu$ для любой функции $\boldsymbol{f} \in \mathscr{L}^p_F$ и $\|u\| = N_q(\boldsymbol{g})$. [Для доказательства последнего равенства воспользоваться предложением 12 и упражнением 13 § 1.]

d) Вывести из c), что если F — *рефлексивное* сепарабельное банахово пространство, то все пространства L^p_F с $1 < p < +\infty$ рефлексивны. [Применить предложение 12 § 1.]

*22) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство, $\mathfrak{S}$ — множество всех его уравновешенных выпуклых подмножеств, компактных в топологии $\sigma(F, F')$, и $\mathfrak{S}'$ — множество всех уравновешенных выпуклых равностепенно непрерывных подмножеств из F', компактных в топологии $\sigma(F', F'')$.

a) Предположим, что всякое множество из $\mathfrak{S}$ предкомпактно в $\mathfrak{S}'$-топологии. Показать, что любое непрерывное линейное отображение u пространства F в квазиполное отделимое локально выпуклое пространство G, переводящее ограниченные подмножества из F в множества, относительно компактные в топологии $\sigma(G, G')$, переводит любое множество из $\mathfrak{S}$ в множество, относительно компактное в исходной топологии пространства G. [Использовать упражнение 12 из Топ. вект. простр., гл. IV, § 1 и вышеприведенное упражнение 11.] И обратно. [Рассмотреть каноническое отображение пространства F в его пополнение в $\mathfrak{S}'$-топологии.]

b) Предположим, что F — метризуемое пространство или строгий индуктивный предел метризуемых пространств. Показать, что условие пункта a) выполнено, если всякая последовательность Коши в топологии $\sigma(F, F')$ есть последовательность Коши в $\mathfrak{S}'$-топологии. [Воспользоваться теоремой Шмульяна (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнение 13б).]

c) Предположим, что F инфрабочечно (Топ. вект. простр., гл. III, § 2, упражнение 12), и обозначим через $\mathfrak{S}''$ множество всех уравновешенных выпуклых равностепенно непрерывных подмножеств из F'', компактных в топологии $\sigma(F'', F''')$. [Показать, что если всякое подмножество из $\mathfrak{S}'$ предкомпактно в $\mathfrak{S}''$-топологии, то всякое подмножество из $\mathfrak{S}$ предкомпактно в $\mathfrak{S}'$-топологии. [Использовать упражнение 12 из Топ. вект. простр., гл. IV, § 1 и заметить, что исходная топология пространства F индуцируется сильной топологией пространства F''.]

*23) Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и F — одно из банаховых пространств $\overline{\mathscr{K}(T)}$, $L^1(\mu)$, $L^\infty(\mu)$. Пусть, далее, u — непрерывное линейное отображение F в квазиполное пространство G, переводящее единичный шар пространства F в множество из G, относительно компактное в топологии $\sigma(G, G')$. Показать, что u переводит всякое множество из F, относительно компактное в топологии $\sigma(F, F')$, в множество, относительно компактное в исходной топологии пространства G. [Применить упражнение 22c для сведения случая $F = L^1(\mu)$ к случаю $F = L^\infty(\mu)$; использовать упражнение 13 § 1 главы II для сведения случая $F = L^\infty(\mu)$ к случаю $F = \mathscr{C}(S)$, где S — надлежащее компактное пространство. При $F = \overline{\mathscr{K}(T)}$ применить упражнение 22b, затем воспользоваться упражнениями 24b и 17 § 5 главы V; заметить, что последовательность Коши в топологии $\sigma(F, F')$ сходится просто на T и тем более сходится по мере для любой ограниченной меры на T.]

*24) Пусть μ — положительная мера на T и u — линейное отображение $L^1(\mu)$ в банахово пространство F, переводящее единичный шар пространства $L^1(\mu)$ в подмножество из F, относительно компактное в топологии $\sigma(F, F')$. Показать, что существует такое μ-*измеримое* отображение f пространства T в F, что $|f(t)| \leqslant \|u\|$ при любом $t \in T$ и

$$u(\widetilde{g}) = \int fg\, d\mu$$

для каждой функции $g \in \overline{\mathscr{L}}^1(\mu)$ (*теорема Данфорда — Петтиса — Филлипса*). [Свести сначала к случаю компактного T при помощи предложения 4 § 1 главы V. Тогда единичный шар B пространства $L^\infty(\mu) \subset L^1(\mu)$ относительно компактен в топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$ (гл. V, § 5, упражнение 17); используя упражнение 23, показать, что замкнутое векторное подпространство в F, порожденное $u(L^1)$, сепарабельно. Значит, можно свести задачу к случаю, когда F сепарабельно и $\overline{u(L^1)} = F$. Тогда замыкание A в F образа единичного шара пространства L^1 при отображении u будет компактно в топологии $\sigma(F, F')$ (гл. IV, § 4, упражнение 19); показать, что оно метризуемо в этой топологии (Топ. вект. простр. гл. IV, § 2, следствие предложения 3). Заметить, что в таком случае A отождествимо с единичным шаром сопряженного к нормированному пространству G, полученному в результате наделения F' нормой, равной калибровочной функции множества A°. Показать, что G сепарабельно, и свести тем самым задачу к применению теоремы Данфорда — Петтиса (следствие 2 теоремы 1).]

*25) Пусть μ — положительная мера на T.

a) Пусть f — такое скалярно μ-измеримое отображение пространства T в банахово пространство F, что $f(T)$ относительно компактно в топологии $\sigma(F, F')$. Показать, что существует такое μ-*измеримое* отображение g пространства T в F, что $f - g$ скалярно локально пренебрежимо. [Рассмотреть отображение $\widetilde{h} \mapsto \int fh\, d\mu$ пространства $L^1(\mu)$ в F и применить к нему упражнение 24, использовав также упражнение 19 § 4 главы IV.]

b) Пусть f — скалярно μ-измеримое отображение пространства T в *рефлексивное* пространство Фреше F. Показать, что существует такое μ-*измеримое* отображение g пространства T в F, что $f - g$ скалярно локально пренебрежимо (см. упражнение 15b). [Свести к случаю компактного T, пользуясь предложением 4 § 1 главы V. Затем применить упражнение 23c § 1, для сведения к случаю, когда $f(T)$ ограничено в F. После этого погрузить F в счетное произведение банаховых пространств и воспользоваться пунктом a).]

c) Пусть f — отображение пространства T в пространство Фреше F, μ-измеримое в топологии $\sigma(F, F')$. Показать, что f μ-измеримо в исходной топологии пространства F. [Свести к случаю, когда T ком-

пактно, а f непрерывно в топологии $\sigma(F, F')$; закончить как в b).]

*26) Пусть S, T — компактные пространства и f — конечная числовая функция на $S \times T$.

a) Для того чтобы отображение $s \mapsto f(s, \cdot)$ пространства S в $\mathbf{R}^T$ было непрерывным отображением пространства S в пространство $\mathscr{C}(T)$, наделенное топологией $\sigma(\mathscr{C}(T), \mathfrak{M}(T))$, необходимо и достаточно, чтобы f было ограничено, а каждое из частичных отображений $f(s, \cdot)$, $f(\cdot, t)$ $(s \in S, t \in T)$ непрерывно. [Для доказательства достаточности условия показать сначала, что образ M пространства S при отображении $s \mapsto f(s, \cdot)$ компактен в топологии $\sigma(\mathscr{C}(T), \mathfrak{M}(T))$. Для этого заметить, что $s \mapsto f(s, \cdot)$ непрерывно, когда $\mathscr{C}(T)$ наделено топологией простой сходимости на T; воспользоваться теоремой Эберлейна (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнение 15), чтобы свести задачу к доказательству того, что всякая последовательность $(f(s_n, \cdot))$ имеет предельную точку в $\mathscr{C}(T)$ в топологии $\sigma(\mathscr{C}(T), \mathfrak{M}(T))$. Свести к случаю метризуемого T, рассматривая надлежащее факторпространство пространства T (см. упражнение 10a), и заметить, что в множестве из $\mathscr{C}(T)$, относительно компактном в топологии простой сходимости на T, эта топология совпадает с топологией простой сходимости на всюду плотном подмножестве из T. Получить таким путем подпоследовательность последовательности $(f(s_n, \cdot))$, сходящуюся просто на T, и применить теорему Лебега. Наконец, заметить, что в M топология $\sigma(\mathscr{C}(T), \mathfrak{M}(T))$ и топология простой сходимости совпадают.]

b) Предположим, что каждое из частичных отображений $f(s, \cdot)$, $f(\cdot, t)$ $(s \in S, t \in T)$ непрерывно. Показать, что для каждой положительной меры μ на S и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K \subset S$, что $\mu(S - K) \leqslant \varepsilon$ и сужение f на $K \times T$ непрерывно. [Свести к случаю, когда f ограничено; применить a) и упражнение 25c.]

c) При тех же допущениях, что и в b), показать, что f измеримо относительно любой меры ν на $S \times T$. [Применить b) к образу меры ν при проектировании $S \times T$ на S.]

27) Пусть $\boldsymbol{m}$ — векторная мера на T со значениями в отделимом локально выпуклом пространстве F.

a) Показать, что если носитель меры $\boldsymbol{m}$ конечен, то $\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_{a_i}$, где $c_i \in F$.

b) Показать, что если F — банахово пространство и $\boldsymbol{m}$ непрерывна в топологии компактной сходимости, то $\boldsymbol{m}$ имеет компактный носитель.

c) Построить пример меры со значениями в $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ и некомпактным носителем, непрерывной в топологии компактной сходимости.

§ 3. Дезинтегрирование мер

1. *Дезинтегрирование меры μ относительно μ-собственного отображения*

Пусть T — локально компактное пространство, имеющее *счетный базис* (иными словами, *польское* локально компактное пространство (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 6, n° 1)). Как мы знаем, для любой положительной меры на T понятия *интеграла* и *существенного интеграла* совпадают (гл. V, § 2, n° 2, замечание 1). С другой стороны, имеют место следующие свойства:

Лемма 1. *Если Y — локально компактное пространство со счетным базисом, то пространство $\mathscr{K}(Y)$ содержит всюду плотное счетное подмножество. Более точно, в $\mathscr{K}(Y)$ имеется такое счетное подмножество S, состоящее из функций $\geqslant 0$, что для любой функции $f \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(Y)$ существует последовательность функций $f_n \in S$ $(n \geqslant 0)$, равномерно сходящаяся к f и такая, что $f_n \leqslant f_0$ для всех $n \geqslant 0$.*

Действительно, Y есть объединение возрастающей последовательности (U_n) таких относительно компактных открытых множеств, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ при любом n (Общ. топ., гл. I, 2-е изд., § 10, предложение 19); пространство $\mathscr{K}(Y)$ есть объединение возрастающей последовательности банаховых пространств $\mathscr{K}(Y, \overline{U}_n)$, каждое из которых, как известно, сепарабельно (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 3, теорема 1). Пусть S'_n — плотное счетное подмножество в $\mathscr{K}(Y, \overline{U}_n)$, S_n — множество всех функций φ^+ $(\varphi \in S'_n)$, а u_n — функция из $\mathscr{K}(Y, \overline{U}_{n+1})$ со значениями в $[0, 1]$, равная 1 на U_n. Возьмем в качестве S объединение множеств S_n и множества всех функций mu_n с целыми $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$. У всякой функции $f \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(Y)$ носитель содержится в одном из U_n, так что f есть равномерный предел некоторой последовательности функций $f_p \in S_n$ $(p \geqslant 1)$. Эти функции f_p равномерно ограничены каким-то целым положительным числом m, и достаточно взять $f_0 = mu_n$.

Лемма 2. *Если Y — локально компактное пространство со счетным базисом, то банахово пространство $\overline{\mathscr{K}(Y)}$ всех непре-*

рывных числовых функций, стремящихся к 0 *на бесконечности, сепарабельно.*

Эта лемма есть не что иное, как следствие теоремы 1 из Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 3. Можно заметить, что она вытекает также из леммы 1 и того, что топология равномерной сходимости в $\mathscr{K}(Y)$ мажорируется индуктивным пределом топологий подпространств $\mathscr{K}(Y, \overline{U}_n)$.

Лемма 3. *Пусть T и X — локально компактные пространства со счетным базисом, μ — положительная мера на T и $t \longmapsto \lambda_t$ — семейство положительных мер на T. Если отображение $t \longmapsto \lambda_t$ скалярно μ-интегрируемо (в топологии $\sigma(\mathfrak{M}(X), \mathscr{K}(X))$, то семейство $t \longmapsto \lambda_t$ μ-согласовано* (гл. V, § 3, определение 1).

Действительно, лемма 1 в применении к $\mathscr{K}(X)$ показывает, что отображение $t \longmapsto \lambda_t$ широко μ-измеримо (§ 1, предложение 13).

Теорема 1. *Пусть T и B — локально компактные пространства со счетным базисом, μ — положительная мера на T, p — μ-собственное отображение* (гл. V, § 6, определение 1) *T в B и $\nu = p(\mu)$ — образ μ при отображении p. Тогда существует ν-согласованное семейство* (гл. V, § 3, определение 1) $b \longmapsto \lambda_b$ ($b \in B$) *положительных мер на T, обладающее следующими свойствами*:

a) $\|\lambda_b\| = 1$ *для любого* $b \in p(T)$;

b) λ_b *сосредоточена на множестве* $p^{-1}(b)$ (гл. V, § 5, определение 4) *для любого* $b \in B$; *в частности,* $\lambda_b = 0$ *для* $b \notin p(T)$;

c) $\mu = \int \lambda_b \, d\nu(b)$.

Кроме того, если $b \longmapsto \lambda'_b$ ($b \in B$) *— второе ν-согласованное семейство положительных мер на T, обладающее свойствами* b) *и* c), *то $\lambda'_b = \lambda_b$ почти всюду на B относительно меры ν.*

1) *Единственность.* Для каждой функции $f \in \mathscr{K}(B)$ отображение $f \circ p$ μ-интегрируемо, поскольку p μ-собственно (гл. V, § 6, теорема 1); значит, для любой функции $g \in \mathscr{K}(T)$ функция $t \longmapsto g(t)f(p(t))$ μ-интегрируема. Отсюда вытекает (гл. V, § 3, теорема 1), что для почти всех $b \in B$ функция $t \longmapsto g(t)f(p(t))$ λ_b-интегрируема и

$$\int g(t)\, f(p(t))\, d\mu(t) = \int d\nu(b) \int g(t)\, f(p(t))\, d\lambda_b(t). \tag{1}$$

Но поскольку λ_b сосредоточена на $p^{-1}(b)$, то $f(p(t)) = f(b)$ для любого $b \in B$ почти всюду относительно λ_b, и, следовательно, правая часть формулы (1) равна $\int f(b) \langle g, \lambda_b \rangle \, d\nu(b)$. Аналогичную формулу имеем для λ'_b. Следовательно, $\int f(b) \langle g, \lambda_b \rangle \, d\nu(b) = \int f(b) \langle g, \lambda'_b \rangle \, d\nu(b)$ для любых $f \in \mathcal{K}(B)$ и $g \in \mathcal{K}(T)$. Иными словами, отображения $b \mapsto \lambda_b$ и $b \mapsto \lambda'_b$ пространства B в $\mathfrak{M}(T)$ равны между собой скалярно локально почти всюду относительно ν и, значит, равны почти всюду относительно ν (лемма 1 и § 1, n° 1, замечание 2).

2) *Предварительное определение семейства* $b \mapsto \lambda_b$. Для каждой функции $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ функция $f \circ p$ μ-интегрируема (гл. V, § 6, (теорема 1), и, значит, $(f \circ p) \cdot \mu$ есть ограниченная мера на T и

$$\| (f \circ p) \cdot \mu \| = \int |f \circ p| \, d\mu = \int |f| \, d\nu = N_1(f)$$

(гл. IV, § 4, предложение 12; гл. V, § 5, теорема 1 и § 6, теорема 1). Отсюда следует, что $(f \circ p) \cdot \mu$ зависит только от класса $\tilde{f}$ функции f в $L^1(\nu)$ и $\tilde{f} \mapsto (f \circ p) \cdot \mu$ есть *изометричное* линейное отображение пространства $L^1(\nu)$ в банахово пространство $\mathfrak{M}^1(T)$ всех ограниченных мер на T, сильное сопряженное к банахову пространству $\overline{\mathcal{K}(T)}$, которое сепарабельно (лемма 2). Согласно теореме Данфорда — Петтиса (§ 2, следствие 2 теоремы 1), существует отображение $b \mapsto \lambda_b$ пространства B в единичный шар пространства $\mathfrak{M}^1(T)$, скалярно ν-измеримое (относительно топологии $\sigma(\mathfrak{M}^1(T), \overline{\mathcal{K}(T)})$) и такое, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ выполняется равенство

$$(f \circ p) \cdot \mu = \int f(b) \lambda_b \, d\nu(b), \tag{2}$$

то есть

$$\int g(t) f(p(t)) \, d\mu(t) = \int f(b) \, d\nu(b) \int g(t) \, d\lambda_b(t) \tag{3}$$

для всех функций $g \in \overline{\mathcal{K}(T)}$.

Если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$, то левая часть формулы (3) будет $\geqslant 0$, чем доказано, что для любой функции $g \geqslant 0$ из $\mathcal{K}(T)$ мера $\left(\int g(t) \, d\lambda_b(t) \right) \cdot \nu \geqslant 0$, а значит, что $\int g(t) \, d\lambda_b(t) \geqslant 0$ для всех b, не принадлежащих некоторому ν-пренебрежимому множеству $N(g)$

(гл. V, § 5, следствие 3 предложения 4). Но в пространстве $\mathscr{K}_+(T)$ всех функций $\geqslant 0$ из $\mathscr{K}(T)$ существует всюду плотная последовательность (g_n) (лемма 1). Объединение N множеств $N(g_n)$ ν-пренебрежимо и для любого $b \notin N$ имеем $\int g_n(t)\, d\lambda_b(t) \geqslant 0$ при всех n, стало быть, $\int g(t)\, d\lambda_b(t) \geqslant 0$ для любой функции $g \in K_+(t)$, то есть $\lambda_b \geqslant 0$.

Теперь можно, не нарушив равенства (3), заменить λ_b на 0 для всех $b \in N$; следовательно, можно предполагать это видоизменение проделанным, иначе говоря, можно считать, что $\lambda_b \geqslant 0$ для всех $b \in B$.

3) *Распространения формулы* (3).

α) Для любой функции $f \in \mathscr{L}^1(\nu)$ из (3) вытекает, что отображение $b \mapsto \lambda_b$ пространства B в $\mathfrak{M}(T)$ скалярно интегрируемо относительно меры $|f\cdot\nu|$ и топологии $\sigma(\mathfrak{M}(T), \mathscr{K}(T))$, а значит (лемма 3), семейство $b \mapsto \lambda_b$ $|f\cdot\nu|$-*согласовано.* Пусть g — числовая функция на T, интегрируемая относительно меры $|(f\circ p)\cdot\mu|$, то есть (гл. V, § 5, теорема 1) такая, что функция $t \mapsto g(t)f(p(t))$ μ-интегрируема; тогда из (2), теоремы 1 § 3 главы V и теоремы 1 § 5 главы V вытекает, что для почти всех $b \in B$ функция g интегрируема относительно λ_b, что (определенная почти всюду) функция $b \mapsto \int g(t)d\lambda_b(t)$ интегрируема относительно $|f\cdot\nu|$ и что формула (3) сохраняет силу.

β) Для любой функции $g \in \overline{\mathscr{K}(T)}$ из формулы (3), примененной к $f \in \mathscr{K}(B)$, вытекает, что отображение p собственно относительно меры $|g\cdot\mu|$ (гл. V, § 6, определение 1) и что образ при отображении p меры $g\cdot\mu$ есть мера плотности $b \mapsto \int g(t)\, d\lambda_b(t)$ относительно ν. Если тогда взять в качестве f такую функцию, что $f\circ p$ интегрируема относительно меры $|g\cdot\mu|$, то есть такую, что $t \mapsto g(t)f(p(t))$ μ-интегрируема (гл. V, § 5, теорема 1), то формула (3) будет верна (гл. V, § 6, теорема 1).

4) *Свойства семейства* $b \mapsto \lambda_b$. Согласно свойству β), можно применить формулу (3) к $f = 1$, $g \in \mathscr{K}(T)$; это показывает, что семейство $b \mapsto \lambda_b$ скалярно ν-интегрируемо (относительно топологии $\sigma(\mathfrak{M}(T), \mathscr{K}(T))$), а следовательно, ν-согласовано (лемма 3), и что $\mu = \int \lambda_b\, d\nu(b)$.

Пусть теперь ψ — произвольная функция из $\mathscr{K}(B)$; условия свойства α) выполнены, если $f \in \mathscr{K}(B)$ и $g = \psi \circ p$, ибо функция $\psi(p(t)) f(p(t))$ μ-интегрируема, поскольку $f\psi$ принадлежит $\mathscr{K}(B)$, а p μ-собственно. Тогда $\psi \circ p$ λ_b-интегрируемо для почти всех $b \in B$ и

$$\int f(p(t))\, \psi(p(t))\, d\mu(t) = \int f(b)\, d\nu(b) \int \psi(p(t))\, d\lambda_b(t);$$

но левая часть по определению равна $\int f(b)\, \psi(b)\, d\nu(b)$. Таким образом, мы видим, что для любой функции $\psi \in \mathscr{K}(B)$ мера $\psi \cdot \nu$ и мера с плотностью $b \longmapsto \int \psi(p(t))\, d\lambda_b(t)$ совпадают. Следовательно (гл. V, § 5, следствие предложения 4), существует такое ν-пренебрежимое множество $N'(\psi)$, что для любого $b \notin N'(\psi)$ функция $\psi \circ p$ λ_b-интегрируема и $\psi(b) = \int \psi(p(t))\, d\lambda_b(t)$.

Пусть S — счетное множество в $\mathscr{K}(B)$, обладающее свойствами, сформулированными в лемме 1 (с $Y = B$), и пусть N' — ν-пренебрежимое множество, являющееся объединением всех множеств $N'(\psi)$ $(\psi \in S)$. Всякая функция $\psi \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(B)$ есть равномерный предел некоторой последовательности (ψ_n) элементов из S, удовлетворяющих условию $\psi_n \leqslant \psi_0$. Следовательно, для $b \notin N'$ теорема Лебега показывает, с одной стороны, что $\psi \circ p$ λ_b-интегрируемо, то есть p λ_b-собственно, а с другой стороны, что $\psi(b) = \int \psi(p(t))\, d\lambda_b(t)$. Иными словами, отображения $b \longmapsto \varepsilon_b$ и $b \longmapsto p(\lambda_b)$ пространства B в $\mathfrak{M}(B)$ (где последнее отображение определено почти всюду) скалярно почти всюду равны относительно ν (и топологии $\sigma(\mathfrak{M}(B), \mathscr{K}(B))$); отсюда заключаем, что эти отображения равны почти всюду относительно ν (лемма 1 и § 1, n° 1, замечание 2). Наконец, если $p(\lambda_b) = \varepsilon_b$, то множество $B - \{b\}$ ε_b-пренебрежимо, и, значит, множество $T - p^{-1}(b)$ λ_b-пренебрежимо (гл. V, § 6, следствие предложения 2), то есть λ_b сосредоточена на $p^{-1}(b)$; а с другой стороны, $\| \lambda_b \| = \int d\lambda_b = \int d(p(\lambda_b)) = \| \varepsilon_b \| = 1$ (гл. V, § 6, теорема 1).

5) *Заключительные модификации семейства* $b \longmapsto \lambda_b$. Итак, мы определили ν-согласованное семейство $b \longmapsto \lambda_b$ мер $\geqslant 0$ на T, удовлетворяющее условию с) теоремы и такое, что для почти всех

$b \in B$ отображение p λ_b-собственно, а λ_b сосредоточено на $p^{-1}(b)$ и имеет норму 1. Обозначим через N'' ν-пренебрежимое множество тех точек $b \in B$, в которых не выполнено хоть одно из последних трех свойств; тогда λ_b можно модифицировать следующим образом. Если $b \in B - p(T)$, принимаем $\lambda_b = 0$; если $b \in p(T) \cap N''$, принимаем $\lambda_b = \varepsilon_{\xi(b)}$, где $\xi(b)$ есть произвольная точка из $p^{-1}(b)$. Так как $B - p(T)$ ν-пренебрежимо (гл. V, § 6, следствие 3 предложения 2), то λ_b изменится лишь в точках пренебрежимого множества, и, стало быть, семейство $b \mapsto \lambda_b$ будет снова ν-согласованным и обладающим свойством c); кроме того, теперь оно обладает и свойствами a) и b), что и завершает доказательство.

Всякое ν-согласованное семейство $b \mapsto \lambda_b$ положительных мер на T, обладающее свойствами b) и c) из теоремы 1, называется *дезинтегрированием* меры μ относительно μ-собственного отображения p.

2. *Псевдообразы мер*

Определение 1. *Пусть T и B — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T и p — μ-измеримое отображение T в B. Положительная мера ν на B называется псевдообразом меры μ при отображении p, если она удовлетворяет следующему условию: для того чтобы множество $N \subset B$ было локально ν-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы множество $p^{-1}(N)$ было локально μ-пренебрежимо.*

Примеры. 1) Если p μ-собственно и $\nu = p(\mu)$, то ν есть псевдообраз меры μ при отображении p (гл. V, § 6, следствие 2 предложения 2).

2) Пусть B' — локально компактное пространство и ν' — положительная мера на B'; примем за T пространство $B \times B'$, а за μ — меру $\nu \otimes \nu'$; если p — проекция T на B, то ν есть псевдообраз меры μ при отображении p (гл. V, § 8, следствие 8 предложения 5 и следствие предложения 2).

Отметим, что если ν — псевдообраз меры μ при отображении p, то она сосредоточена в $p(T)$.

Если ν — псевдообраз меры μ при отображении p, то множеством всех псевдообразов меры μ при отображении p служит класс всех положительных мер, эквивалентных ν, и всякая положительная мера, эквивалентная μ, имеет те же псевдообразы при отображении p. Класс меры ν называется *псевдообразом* класса меры μ при отображении p.

Предложение 1. *Пусть T — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, μ — положительная мера на T и p — μ-измеримое отображение пространства T в локально компактное пространство B. Тогда существует мера, являющаяся псевдообразом меры μ при отображении p.*

В самом деле, на T существует *ограниченная* мера μ', эквивалентная μ (гл. V, § 6, предложение 11); тогда отображение p μ'-собственно.

3. *Дезинтегрирование меры μ относительно ее псевдообраза*

Теорема 2. *Пусть T и B — локально компактные пространства со счетным базисом, μ — положительная мера на T, p — μ-измеримое отображение T в B и ν — псевдообраз меры μ при отображении p. Тогда существует ν-согласованное семейство $b \mapsto \lambda_b$ $(b \in B)$ положительных мер на T, обладающее следующими свойствами:*

a) $\lambda_b \neq 0$ *для всех* $b \in p(T)$;

b) λ_b *сосредоточена на множестве* $p^{-1}(b)$ *при всех* $b \in B$; *в частности,* $\lambda_b = 0$ *для всех* $b \notin p(T)$;

c) $\mu = \int \lambda_b \, d\nu(b)$.

Кроме того, если $\nu' = r \cdot \nu$ — второй псевдообраз меры μ при отображении p и $b \mapsto \lambda'_b$ есть ν'-согласованное семейство положительных мер на T, обладающее свойствами b) *и* c) *относительно ν', то $\lambda_b = r(b)\,\lambda'_b$ почти всюду на B (относительно ν или ν').*

В самом деле, существует такая непрерывная конечная числовая функция f на T, что $f(t) > 0$ для всех $t \in T$ и что $\mu'' = f \cdot \mu$ ограничено (гл. V, § 5, предложение 11). Пусть $\nu'' = p(\mu'')$, что

является мерой, эквивалентной ν, и положим $\nu''=g\cdot\nu$, где g — конечная локально ν-интегрируемая функция; кроме того, можно предполагать $g(b)>0$ для всех $b\in B$ (гл. V, § 5, предложение 10). Теорема 1 в применении к μ'' и ν'' показывает, что существует ν''-согласованное семейство $b\mapsto\lambda''_b$ $(b\in B)$ таких положительных мер на T, что: 1) $\|\lambda''_b\|=1$ для всех $b\in p(T)$; 2) λ''_b сосредоточена на $p^{-1}(b)$ при любом $b\in B$; 3) $\mu''=\int\lambda''_b\,d\nu''(b)$.

Для каждого $b\in B$ определим положительную меру λ_b на T формулой $\lambda_b=\frac{1}{f}\cdot(g(b)\,\lambda'_b)$. Ясно, что семейство $b\mapsto\lambda_b$ обладает указанными выше свойствами a) и b). С другой стороны, для каждой функции $h\in\mathcal{K}(T)$ функция h/f принадлежит $\mathcal{K}(t)$, и, значит,

$$\int h(t)\,d\mu(t)=\int(h(t)/f(t))\,d\mu''(t)=\int d\nu''(b)\int(h(t)/f(t))\,d\lambda''_b(t).$$

Но так как функция $b\mapsto\int(h(t)/f(t))\,d\lambda''_b(t)$ ν''-интегрируема, то функция $b\mapsto g(b)\int(h(t)/f(t))\,d\lambda''_b(t)$ ν-интегрируема (гл. V, § 5, теорема 1). По определению меры λ_b, эта функция есть $b\mapsto\int h(t)\,d\lambda_b(t)$, откуда $\int h(t)\,d\mu(t)=\int d\nu(b)\int h(t)\,d\lambda_b(t)$ (там же), чем и доказано, что $\mu=\int\lambda_b\,d\nu(b)$.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что можно предполагать $r(b)>0$ для всех $b\in B$ (гл. V, § 5, предложение 10); положим $\lambda'''_b=f\cdot((r(b)/g(b))\,\lambda'_b)$; как и выше, доказывается, что для любой функции $h\in\mathcal{K}(t)$ соотношение

$$\int h(t)\,d\mu(t)=\int d\nu'(b)\int h(t)\,d\lambda'_b(t)$$

влечет

$$\int h(t)\,d\mu(t)=\int d\nu'(b)\int(h(t)/f(t))\,d\lambda'''_b(t).$$

Поэтому теорема 1 в применении к μ'' и ν'' показывает, что для почти всех $b\in B$ выполняется равенство $\lambda'''_b=\lambda'_b$, откуда $\lambda_b=$ $=r(b)\lambda'_b$.

Определение 2. *Пусть T и B — польские локально компактные пространства. Если заданы положительная мера μ на T, μ-измеримое отображение p пространства T в B и псевдообраз ν меры μ при отображении p, то всякое ν-согласованное семейство $b \mapsto \lambda_b$ ($b \in B$) положительных мер на T, обладающее свойствами* b) *и* c) *из теоремы* 2, *называется дезинтегрированием меры μ относительно ν.*

Когда p μ-собственно и $\nu = p(\mu)$, то понятие дезинтегрирования относительно p совпадает с понятием дезинтегрирования относи тельно ν. В условиях теоремы 2, два дезинтегрирования меры μ относительно одного и того же ее псевдообраза ν равны почти всюду относительно ν.

Замечание. Теорема 1 § 3 главы V показывает (с учетом того, что T и B имеют счетный базис), что для любой μ-интегрируемой функции f, определенной на T и принимающей значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве F, множество тех $b \in B$, для которых f не λ_b-интегрируема, ν-пренебрежимо, функция $b \mapsto \int f(t)\, d\lambda_b(t)$, определенная почти всюду, ν-интегрируема и

$$\int f(t)\, d\mu(t) = \int d\nu\ (b) \int f(t)\, d\lambda_b(t).$$

Аналогичный результат для скалярно μ-интегрируемых функций получим, применив предложение 3 § 1.

4. Измеримые отношения эквивалентности

Отношение эквивалентности R в топологическом пространстве X называется *отделимым*, если отделимо факторпространство X/R.

Напомним (Общ. топ., гл. I, 2-е изд., § 9, теорема 2), что если R — *открытое* отношение эквивалентности, то это равносильно утверждению, что его график в $X \times X$ замкнут.

Пусть p — отображение пространства X в отделимое топологическое пространство B и R — отношение эквивалентности $p(x) = p(y)$ в X; если K — такое *компактное* множество в X, что сужение p на K *непрерывно*, то отношение R_K, индуцированное отноше-

нием R на K, отделимо, ибо факторпространство K/R_K гомеоморфно пространству $p(K)$, которое компактно (Общ. топ., гл. I, 2-е изд., § 10, следствие 1 предложения 8). Если T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и p μ-измеримое отображение пространства T в отделимое топологическое пространство B, то мы видим, что множество тех компактных подмножеств K из T, для которых отношение R_K отделимо, μ-плотно (гл. V, § 1, n° 2). Таким образом, мы приходим к следующему определению:

Определение 3. *Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Отношение эквивалентности R в T называется μ-измеримым, если множество тех компактных подмножеств K из T, для которых R_K отделимо, μ-плотно.*

Если R отделимо, то оно μ-измеримо, ибо каноническое отображение φ пространства T на отделимое топологическое пространство T/R непрерывно, а R эквивалентно отношению $\varphi(x) = \varphi(y)$. Точно так же, если R таково, что насыщение по R всякого компактного подмножества из T замкнуто (и, в частности, если R — *замкнутое* отношение эквивалентности), то R μ-измеримо, так как для любого компактного множества K из T отношение R_K замкнуто, а значит, отделимо (Общ. топ., гл. I, 2-е изд., § 10, предложение 8).

Отметим, что если R μ-измеримо, то R измеримо также относительно всякой меры с базисом μ на T.

Предложение 2. *Пусть T — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, и μ — положительная мера на T.*

1) *Для любого μ-измеримого отношения эквивалентности R на T существуют локально компактное пространство B и такое μ-измеримое отображение p пространства T в B, что R эквивалентно отношению $p(x) = p(y)$.*

2) *Если к тому же T имеет счетный базис, то можно предполагать, что и B имеет счетный базис.*

Поскольку T счетно в бесконечности, существует возрастающая последовательность $(K_n)_{n \geqslant 1}$ таких компактных подмножеств из T, что T есть объединение множеств K_n и μ-пренебрежимого множества N и каждое отношение R_{K_n} отделимо. Пусть B_n — компактное факторпространство K_n/R_{K_n} и B'_n — компактная топологиче-

ская сумма пространства B_n и некоторой точки a_n. Пусть, далее, q_n — каноническое отображение K_n на B_n; продолжим его до отображения p_n пространства T в B'_n следующим образом: если $x \in T$ конгруэнтно mod R некоторому элементу $y \in K_n$, то положим $p_n(x) = q_n(y)$; в противном же случае положим $p_n(x) = a_n$. Пусть B' — компактное пространство-произведение $\prod_{n=1}^{\infty} B'_n$ и p' — отображение $x \longmapsto (p_n(x))$ пространства T в B'. Покажем, что p' μ-*измеримо*: достаточно (гл. IV, § 5, теорема 1) доказать, что каждое из отображений p_n измеримо, а для этого достаточно, чтобы сужение p_n на каждое K_m было измеримо. Но для $m \leqslant n$ это очевидно; если же $m > n$, то обозначим через K_{nm} насыщение K_n по R_{K_m}, которое является компактным множеством в K_m (Общ. топ., гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 2); поскольку p_n постоянно на $K_m — K_{nm}$, достаточно доказать, что сужение p_n на K_{nm} непрерывно, что очевидно в силу существования между $K_{nm}/R_{K_{nm}}$ и K_n/R_{K_n} канонического изоморфизма (Общ. топ., гл. I, § 10, следствие 2 предложения 8).

Пусть A — насыщение множества $\bigcup_n K_n$ по отношению R и $N' = T — A \subset N$. Мы покажем, что отношение $p'(x) = p'(y)$ эквивалентно отношению «$R\{x, y\}$ или $(x, y) \in N' \times N'$». Действительно, если имеет место $R\{x, y\}$, то $p_n(x) = p_n(y)$ при всех n, и, значит, $p'(x) = p'(y)$; а если $x \in N'$, $y \in N'$, то $p_n(x) = p_n(y) = a_n$ при всех n, и, значит, $p'(x) = p'(y)$. С другой стороны, если x и y принадлежат A и не конгруэнтны mod R, то существуют такое целое n и такой элемент $x' \in K_n$ (соотв. $y' \in K_n$), конгруэнтный mod R элементу x (соотв. y), что x' не конгруэнтен y' mod R_{K_n}; поэтому $p_n(x) \neq p_n(y)$, и, следовательно, $p'(x) \neq p'(y)$. Наконец, если $x \in N'$, а $y \in A$, то $p_n(y) \in B_n$ для достаточно больших n и $p_n(x) = a_n$ для всех n, а стало быть, $p'(x) \neq p'(y)$, и наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь фактормножество $B_0 = N'/R_{N'}$; пусть q_0 — каноническое отображение N' на B_0 и s_0 — сечение, ассоциированное с q_0. Положим $p_0(x) = s_0(q_0(x))$ для всех $x \in N'$ и продолжим p_0 на T, приняв p_0 на A постоянным и равным некоторому элементу из T. Тогда $p = (p', p_0)$ есть μ-измеримое отображение пространства T в локально компактное пространство $B = B' \times T$;

очевидно, если $x \in N'$, $y \in N'$, то отношение $p_0(x) = p(y)$ влечет $R\{x, y\}$; следовательно, p отвечает поставленным требованиям. Кроме того, если T имеет счетный базис, то тем же свойством обладает и каждое из факторпространств B_n (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 2, предложение 17), и тогда B', а стало быть, и B имеет счетный базис.

Предложение 3. *Пусть T — польское локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и R — отношение эквивалентности в T. Следующие свойства равносильны:*

a) *R μ-измеримо.*

b) *Существует такая последовательность отображений p_n: $T \to F_n$ в отделимые топологические пространства, что каждое p_n μ-измеримо и отношение $R\{x, y\}$ эквивалентно отношению «каково бы ни было n, $p_n(x) = p_n(y)$».*

c) *Существует последовательность (A_n) μ-измеримых множеств, насыщенных по R и таких, что класс любого $x \in T$ по R есть пересечение тех A_n, которые содержат x.*

В обозначениях из b), положим $p(x) = (p_n(x))$; свойство b) означает, что отображение p пространства T в произведение $\prod\limits_n F_n$ измеримо (гл. IV, § 5, теорема 1), а отношение $R\{x, y\}$ эквивалентно отношению $p(x) = p(y)$; следовательно, b) влечет a).

Покажем, далее, что c) влечет b). Предположим c) выполненным; тогда характеристические функции φ_{A_n} μ-измеримы и c) означает, что отношение $R\{x, y\}$ эквивалентно отношению «каково бы ни было n, $\varphi_{A_n}(x) = \varphi_{A_n}(y)$».

Наконец, покажем, что a) влечет c). Согласно предложению 2, существуют локально компактное пространство B со счетным базисом и такое μ-измеримое отображение p пространства T в B, что отношение $R\{x, y\}$ эквивалентно отношению $p(x) = p(y)$. Пусть (U_n) — счетный базис топологии пространства B. Множества $A_n = p^{-1}(U_n)$ μ-измеримы (гл. IV, § 5, предложение 8) и насыщены по R; а если x, y — такие точки из T, что $p(x) \neq p(y)$, то существует такой индекс n, что $p(x) \in U_n$, а $p(y) \notin U_n$, что означает, что $x \in A_n$, а $y \notin A_n$.

Замечание. Если R — μ-измеримое отношение эквивалентности в T, то насыщение по R компактного множества из T не обязательно μ-измеримо (упражнение 5).

Теорема 3. *Пусть T — локально компактное пространство со счетным базисом, μ — положительная мера на T и R — μ-измеримое отношение эквивалентности в T. Тогда в T существует μ-измеримое подмножество S, пересекающее всякий класс по R в одной и только одной точке* («*измеримое сечение*» *для* R).

Очевидно, можно предполагать, что мера μ ограничена и $\mu(T) \leqslant 1$ (гл. V, § 5, предложение 11). Мы определим последовательность (S_n) таких *борелевских* подмножеств (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 6, n° 3), что всякий класс эквивалентности по R пересекает объединение S' множеств S_n не более чем в одной точке, что для любого n насыщение T_n объединения множеств S_p с индексами $p \leqslant n$ μ-измеримо и что $\mu(T - T_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Тогда насыщение T' множества S' будет μ-измеримым и $N = T - T'$ — иметь меру нуль. Множество $S = S' \cup S''$, где S'' — произвольное сечение множества N по отношению R_N, и будет искомым, ибо S', будучи борелевским множеством, μ-измеримо (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 6, теорема 5 и предложение 11), а S'' имеет меру нуль.

Согласно предложению 2, $R\{x, y\}$ эквивалентно отношению $p(x) = p(y)$, где p — μ-измеримое отображение пространства T в некоторое локально компактное пространство F. Предположим, что S_k определены для $k \leqslant n$. Так как $T - T_n$ μ-измеримо и его мера не превосходит $\frac{1}{2^n}$, то в $T - T_n$ существует такое компактное подмножество K, что $\mu(T - (T_n \cup K)) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ и сужение p на K непрерывно. Так как индуцированное отношение R_K замкнуто и K метризуемо, то, как мы знаем, существует такое борелевское множество $S_{n+1} \subset K$, что всякая точка в K конгруэнтна $(\mathrm{mod}\ R)$ одной и только одной точке из S_{n+1} (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 6, теорема 4). Следовательно, $p(S_{n+1}) = p(K)$, и это множество компактно в F; насыщение множества S_{n+1} по R есть прообраз $p^{-1}(p(K))$ и, стало быть, μ-измеримо (гл. IV, § 5, предложение 8); ясно, что это множество содержит K, а значит, объединение T_{n+1} множества T_n и $p^{-1}(p(K))$ μ-измеримо, насыщено по R и таково, что $\mu(T - T_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, что и завершает доказательство.

5. *Дезинтегрирование меры по измеримому отношению эквивалентности*

Пусть T — польское локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и R — μ-измеримое отношение эквивалентности в T. Тогда существуют (предложение 2) такое польское локально компактное пространство B и такое μ-измеримое отображение p пространства T в B, что отношение $p(x) = p(y)$ эквивалентно $R\{x, y\}$. Всякий псевдообраз ν меры μ при отображении p (n° 2) будет называться *фактормерой меры* μ *по отношению* R; если $b \mapsto \lambda_b$ есть дезинтегрирование меры μ относительно меры ν, то будем говорить, что $b \mapsto \lambda_b$ есть *дезинтегрирование меры* μ *по отношению* R. Согласно свойствам отображения p и мер λ_b, каждая из мер λ_b сосредоточена на некотором классе эквивалентности по R, и если $b \neq c$, то меры λ_b и λ_c сосредоточены на различных классах.

Пространство B, отображение p и псевдообраз ν на B меры μ могут быть, вообще говоря, выбраны бесконечным множеством способов. Однако все различные дезинтегрирования меры μ по R могут быть получены из одного, как показывает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть T — польское локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и R — μ-измеримое отношение эквивалентности в T. Пусть, далее, B и B — польские локально компактные пространства, а p и p' — такие μ-измеримые отображения пространства T соответственно в B и B', что $R\{x, y\}$ эквивалентно как $p(x) = p(y)$, так и $p'(x) = p'(y)$. Пусть, наконец, ν и ν' — псевдообразы меры μ при отображениях соответственно p и p', а $b \mapsto \lambda_b$ и $b' \mapsto \lambda'_b$ — дезинтегрирования меры μ соответственно относительно ν и ν'.*

При этих условиях существуют такое множество N (соотв. N') *в B* (соотв. B), *пренебрежимое относительно* ν (соотв. ν'), *и такая биекция f множества $B - N$ на $B' - N'$, что выполняются следующие свойства:*

а) *Отображение f (определенное почти всюду на B) ν-измеримо и обратное к нему отображение f' ν'-измеримо; всякий псевдообраз меры* ν (соотв. ν') *при отображении* f (соотв. f') *эквивалентен* ν' (соотв. ν).

b) *Для любого* $b \in B - N$ *мера* $\lambda'_{f(b)}$ *на* T *имеет вид* $r(b)\lambda_b$, *где* $r(b) \neq 0$ *и* r *локально* ν-*интегрируемо*.

Для установления свойства а) достаточно ограничиться случаем, когда ν и ν' — *ограниченные* меры (гл. V, § 5, предложение 11). Пусть $N_0 = B - p(T)$, $N'_0 = B' - p'(T)$; мы знаем, что N_0 (соотв. N'_0) пренебрежимо относительно ν (соотв. ν') (n° 2). Существует биекция f множества $B - N_0$ на $B' - N'_0$, определяемая равенством $f(p(t)) = p'(t)$ для всех $t \in T$; пусть f' — отображение, обратное к f, так что $f'(p'(t)) = p(t)$. Для каждого множества $M \subset B$ отношение «M ν-измеримо» эквивалентно отношению «$p^{-1}(M)$ μ-измеримо», то есть отношению «$p'^{-1}(f(M))$ μ-измеримо», а значит, в итоге, отношению «$f(M)$ ν'-измеримо» (гл. V, § 6, следствие предложения 3). Таким образом видим, что f (соотв. f') преобразует всякое ν-измеримое (соотв. ν'-измеримое) множество в ν'-измеримое (соотв. ν-измеримое); а так как B и B' метризуемы и имеют счетный базис, то отсюда вытекает, что f и f' измеримы (гл. IV, § 5, теорема 4). Кроме того, если множество $M \subset B$ ν-пренебрежимо, то $p^{-1}(M) = p'^{-1}(f(M))$ μ-пренебрежимо, и, следовательно, $f(M)$ ν'-пренебрежимо (гл. V, § 6, следствие 2 предложения 2); точно так же f' преобразует всякое ν'-пренебрежимое множество в ν-пренебрежимое. Стало быть, образ меры ν при отображении f (который определен, поскольку ν ограничена, из чего следует, что f ν-собственно) эквивалентен ν', а образ меры ν' при отображении f' эквивалентен ν (гл. V, § 5, предложение 10). Остается доказать b). Согласно теореме 2, можно ограничиться случаем, когда $\nu' = f(\nu)$. Так как $\mu = \int \lambda'_{b'}\, d\nu'(b')$, то для любой функции $h \in \mathscr{K}(T)$

$$\int h(t)\, d\mu(t) = \int d\nu'(b') \int h(t)\, d\lambda'_{b'}(t) = \int d\nu(b) \int h(t)\, d\lambda'_{f(b)}(t)$$

(гл. V, § 3, теорема 1 и § 6, теорема 1); имыми словами, $\mu = \int \lambda'_{f(b)}\, d\nu(b)$. Но поскольку также $\mu = \int \lambda_b\, d\nu(b)$ и для любого $b \in B - N_0$ меры λ_b и $\lambda'_{f(b)}$ сосредоточены в $p^{-1}(b)$, то теорема 2 влечет, что $\lambda_b = \lambda'_{f(b)}$ для почти всех $b \in B - N_0$, а значит, и для почти всех $b \in B$. Итак, условия теоремы 4 будут удовлетворены, если взять в качестве N объединение множества N_0 и множества тех $b \in B$, для которых $\lambda_b \neq \lambda'_{f(b)}$.

Упражнения

1) Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Пусть h — такая локально μ-интегрируемая функция, что отображение p $(h \cdot \mu)$-собственно. Показать, что функция $b \longmapsto g(b) = \int h(t)\, d\lambda_b(t)$, определенная локально почти всюду на B (относительно меры $\nu = p(\mu)$), такова, что $p(h \cdot \mu) = g \cdot \nu$.

2) Пусть B — локально компактное пространство и $(\nu_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство *всех* положительных мер на B. Пусть, далее, T есть пространство-произведение $I \times B$, где I наделено дискретной топологией, и пусть ν — мера на T, сужение которой на $\{\iota\} \times B$ есть канонический образ меры ν_ι на B для каждого $\iota \in I$. Пусть, наконец, p — проекция T на B. Показать, что если в B существует несчетное компактное подмножество, то ν не имеет псевдообраза при отображении p. [Показать, что для такой меры каждая точка из B имела бы меру >0.]

3) Построить пример положительной меры μ на польском локально компактном пространстве T и непрерывного отображения p пространства T в польское локально компактное пространство B так, чтобы p не было μ-собственным.

4) Пусть T — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и μ — мера Лебега на T. Пусть, далее, $R\{x, y\}$ — отношение эквивалентности $x - y \in \mathbf{Q}$ в T. Показать, что R не μ-измеримо [применить теорему 3], но его график в $T \times T$ пренебрежим относительно меры-произведения $\mu \otimes \mu$.

5) Пусть T — объединение триадического канторова множества $K \subset [0, 1]$ и интервала $I = [1, 2]$ из $\mathbf{R}$, а μ — мера, индуцированная на компактном пространстве T мерой Лебега. Пусть, далее, P — неизмеримое подмножество из I, имеющее мощность континуума (гл. IV, § 4, упражнение 8), и ψ — биекция K на P. Рассмотрим в T отношение эквивалентности R, при котором всякая точка x, не принадлежащая $K \cup P$, служит своим классом эквивалентности, а класс точки $y \in K$ состоит из y и $\psi(y)$. Показать, что R μ-измеримо, но насыщение K по R не μ-измеримо.

6) Пусть T — польское локально компактное пространство, μ — положительная мера на T, R — μ-измеримое отношение эквивалентности в T, p — такое μ-измеримое отображение T в польское локально компактное пространство B, что $p(x) = p(y)$ эквивалентно $R\{x, y\}$, ν — псевдообраз меры μ при отображении p и $b \longmapsto \lambda_b$ — дезинтегрирование меры μ по отношению R. Пусть $C(b)$ для всякого $b \in B$, такого, что $\lambda_b \neq 0$, означает класс mod R, в котором сосредоточено λ_b; показать, что мера $\varphi_{C(b)} \cdot \mu$ пропорциональна λ_b. Привести пример, когда $\varphi_{C(b)} \cdot \mu = 0$ для любого $b \in B$.

7) Пусть T — польское локально компактное пространство, μ — ограниченная положительная мера на T и R μ-измеримое

отношение эквивалентности на T. Пусть, далее, Ω—подпространство пространства $\mathfrak{M}(T)$ мер на T, образованное всеми ненулевыми мерами $\lambda \geqslant 0$ с общей массой $\leqslant 1$; при наделении широкой топологией, Ω локально компактно (гл. III, § 2, следствие 2 предложения 9). Показать, что на Ω существует, и притом единственная, положительная мера ρ, такая, что: 1° $\mu = \int\limits_{\Omega} \lambda d\rho(\lambda)$; 2° ρ сосредоточена на множестве $B_0 \subset \Omega$, элементами которого служат меры с общей массой 1, сосредоточенные в классах mod R, причем два различных элемента из B_0 сосредоточены в различных классах. [Рассмотреть дезинтегрирование $b \longmapsto \lambda_b$ меры μ по отношению R, такое, чтобы все λ_b имели общую массу 1, и образ множества B при его отображении $b \longmapsto \lambda_b$ в Ω; воспользоваться теоремой 4.]

8) Пусть T — интервал $[0, 2]$ из $\mathbf{R}$ и μ — мера Лебега на T. Пусть, далее, A — неборелевское множество, содержащееся в канторовом множестве $K \subset [0, 1]$ (см. Общ. топ., гл. IV, § 8, упражнение 16 и гл. IX, 2-е изд., § 6, упражнение 6). Пусть, наконец, S — отношение эквивалентности в T, классами эквивалентности которого являются множества $\{x\}$ для $x \notin A \cup (A+1)$ и множества $\{x, x+1\}$ для $x \in A$. Показать, что S μ-измеримо, но не обладает никаким борелев ским сечением.

9) Пусть K — метризуемое компактное пространство, f — его непрерывное отображение в отделимое топологическое пространство E и k — произвольное целое >1. Обозначим через B_k подмножество из E, состоящее из тех y, для которых $\overset{-1}{f}(y)$ содержит по крайней мере k различных точек; показать, что $A_k = \overset{-1}{f}(B_k)$ есть борелевское множество в K. [Пусть B_{kn} для каждого целого $n > 0$ означает подмножество из E, состоящее из тех y, для которых $\overset{-1}{f}(y)$ содержит по крайней мере k точек с попарными расстояниями $\geqslant \frac{1}{n}$; показать, что B_{kn} замкнуто.]

*10) Пусть K — метризуемое компактное пространство, μ — положительная мера на K и f — μ-измеримое отображение K в отделимое топологическое пространство E. Обозначим через I (соотв. U) подмножество из E, состоящее из тех y, для которых $\overset{-1}{f}(y)$ бесконечно (соотв. несчетно).

a) Показать, что в K существует такое μ-измеримое множество H, что $f(H) = I$ и $\overset{-1}{f}(y) \cap \complement H$ для каждого $y \in E$ конечно. [Пусть (K_n) — такая возрастающая последовательность компактных подмножеств из K, что сужение f на каждое K_n непрерывно и дополнение N к объединению F всех множеств K_n μ-пренебрежимо; для каждого $k > 1$ обозначим через B_k подмножество из E, состоящее из тех y, для кото-

рых $F \cap \overset{-1}{f}(y)$ содержит по крайней мере k различных точек, и пусть $A_k = F \cap \overset{-1}{f}(B_k)$; взять в качестве H объединение множеств $A = \bigcap_k A_k$ и $N \cap \overset{-1}{f}(I)$ и применить упражнение 9.]

b) Пусть $\mathfrak{F}$ — множество таких μ-измеримых подмножеств $M \subset H$, что $M \cap \overset{-1}{f}(y)$ для каждого $y \in E$ конечно, и пусть α — верхняя грань мер $\mu(M)$ $(M \in \mathfrak{F})$; существует возрастающая последовательность (M_n) множеств из $\mathfrak{F}$, для которой $\lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = \alpha$. Пусть $P = \bigcup_n M_n$ и S — измеримое сечение множества $H \cap \complement P$ по отношению эквивалентности $f(x) = f(y)$ (теорема 3); показать, что $\mu(S) = 0$.

c) Показать, что существует такое μ-пренебрежимое множество $Z \subset K$, что $f(Z) = U$, и что для любого $\varepsilon > 0$ существует μ-измеримое множество $L \subset K$, для которого $\mu(L) \leqslant \varepsilon$, а $f(L) = I$. [Заметить, что $f(H \cap \complement M_n) = I$ для всех n и $U \subset f(S)$.]

*11) Пусть K — метризуемое компактное пространство, μ — положительная мера на K, f — μ-измеримое отображение K в локально компактное пространство T и ν — положительная мера на T; и пусть I и U имеют тот же смысл, что в упражнении 10.

a) Предположим, что $f(N)$ для любого μ-пренебрежимого множества $N \subset K$ ν-пренебрежимо. Тогда U ν-пренебрежимо и $f(A)$ для любого μ-измеримого $A \subset K$ ν-измеримо.

b) Для того чтобы I было ν-пренебрежимо, а образ при отображении f всякого μ-пренебрежимого множества был ν-пренебрежим, необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяло следующему условию: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого μ-измеримого множества $A \subset K$, такого, что $\mu(A) \leqslant \delta$, $f(A)$ ν-измеримо и $\nu(f(A)) \leqslant \varepsilon$. [Для доказательства необходимости условия рассуждать от противного, рассматривая убывающую последовательность (A_n) μ-измеримых множеств, пересечение которых μ-пренебрежимо, но для которых $\nu(f(A_n)) \geqslant \alpha > 0$; взять тогда пересечение $f(A_n)$ и $\complement I$.]

*12) Пусть E — неметризуемое компактное пространство, получаемое в результате наделения интервала $[-1, +1]$ из $\mathbf{R}$ топологией τ, определенной в упражнении 13a из Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 2; пусть φ — отображение $x \longmapsto |x|$ пространства E на интервал $I = [0, 1]$ (наделенный топологией, индуцированной из $\mathbf{R}$).

a) Показать, что φ непрерывно и что если обозначить через $\mathfrak{F}$ множество всех подмножеств из E вида $\overset{-1}{\varphi}(A)$, где A — борелевское подмножество из I, то борелевскими будут такие подмножества B из E, что существует множество $M \in \mathfrak{F}$, для которого $B \cap \complement M$ и $M \cap \complement B$ счетны. [Заметить, что всякое открытое множество из E принадлежит $\mathfrak{F}$.]

b) Показать, что для того, чтобы числовая функция f на E была непрерывна (в топологии τ), необходимо и достаточно, чтобы она была линейчатой и для любого $x \in E$ выполнялось равенство $f(x-) = f((-x)+)$. Стало быть, формула $\int f\,d\mu = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ определяет положительную меру μ на E. Показать, что образ меры μ при отображении φ есть мера Лебега на I и что μ-пренебрежимые множества — не что иное, как пренебрежимые относительно меры Лебега на $[-1, +1]$.

c) Вывести из a) и b), что не существует μ-измеримого сечения по μ-измеримому отношению эквивалентности $\varphi(x) = \varphi(y)$ в E.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ VI

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. *Билинейные формы и линейные отображения*

Пусть (F_1, G_1) и (F_2, G_2) — две пары векторных (действительных или комплексных) пространств, находящихся в двойственности (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, n° 1); предположим, что каждое из этих пространств наделено соответствующей *слабой* топологией (там же, n° 2). Пусть A и B — любые из этих пространств; будем, как обычно, обозначать через $\mathscr{L}(A; B)$ векторное пространство всех непрерывных линейных отображений A в B, а через $\mathfrak{B}(A, B)$ — векторное пространство всех *раздельно непрерывных* билинейных форм на $A \times B$.

Для любой раздельно непрерывной билинейной формы Φ на $F_1 \times F_2$ отображение $x_1 \longmapsto \Phi(x_1, x_2)$ есть непрерывная линейная форма на F_1, а значит, существует, и притом только один, элемент ${}^r\Phi(x_2) \in G_1$ такой, что

$$\Phi(x_1, x_2) = \langle x_1, {}^r\Phi(x_2)\rangle \tag{1}$$

для всех $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, предложение 1). Кроме того, эта формула показывает, что отображение $x_2 \longmapsto {}^r\Phi(x_2)$ линейно и непрерывно в (слабых) топологиях пространств F_2 и G_1. Обратно, для любого непрерывного линейного отображения u пространства F_2 в G_1 отображение $(x_1, x_2) \longmapsto \Phi(x_1, x_2) = \langle x_1, u(x_2)\rangle$ есть раздельно непрерывная билинейная форма на $F_1 \times F_2$ и ${}^r\Phi = u$. Таким образом определен изоморфизм r: $\Phi \longmapsto {}^r\Phi$ пространства $\mathfrak{B}(F_1, F_2)$ на $\mathscr{L}(F_2; G_1)$, называемый *каноническим*.

Формула

$$\Phi(x_1, x_2) = \langle {}^l\Phi(x_1), x_2 \rangle \tag{2}$$

так же определяет *канонический изоморфизм* l: $\Phi \longrightarrow {}^l\Phi$ пространства $\mathfrak{B}(F_1, F_2)$ на $\mathcal{L}(F_1; G_2)$; и, очевидно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B}(F_1, F_2) \arrow[dl, shift right, "l"'] \arrow[dr, shift left, "r"] & \\
\mathcal{L}(F_1; G_2) \arrow[ur, shift right, "l^{-1}"'] \arrow[rr, leftrightarrow, "t"] & & \mathcal{L}(F_2; G_1) \arrow[ul, shift left, "r^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

где t — изоморфизм сопряжения $u \longmapsto {}^tu$. Кроме того, из определения слабых топологий в G_1 и G_2 явствует, что если наделить пространства $\mathfrak{B}(F_1, F_2)$, $\mathcal{L}(F_1; G_2)$ и $\mathcal{L}(F_2; G_1)$ топологией простой сходимости, то изоморфизмы в предыдущей диаграмме будут изоморфизмами для структур топологического векторного пространства.

Пусть теперь E и F — отделимые локально выпуклые пространства, а E' и F' — их сопряженные; обозначим через E_σ, F_σ пространства E, F, наделенные ослабленной топологией $\sigma(E, E')$, $\sigma(F, F')$, а через E'_s, F'_s — пространства E', F', наделенные слабой топологией $\sigma(E', E)$, $\sigma(F', F)$. Тогда предыдущие замечания устанавливают канонический изоморфизм между тремя пространствами $\mathfrak{B}(E_\sigma, F'_s)$, $\mathcal{L}(E_\sigma; F_\sigma)$ и $\mathcal{L}(F'_s; E'_s)$, а также между тремя пространствами $\mathfrak{B}(E_\sigma, F_\sigma)$, $\mathcal{L}(E_\sigma; F'_s)$ и $\mathcal{L}(F_\sigma; E'_s)$. Заметим, что $\mathfrak{B}(E_\sigma, F_\sigma)$ равно также пространству $\mathfrak{B}(E, F)$ всех раздельно непрерывных билинейных форм на $E \times F$ (где E и F наделены своими исходными топологиями), поскольку всякая непрерывная линейная форма на E (соотв. F) непрерывна на E_σ (соотв. F_σ) и обратно (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, n° 1 и предложение 1).

Пусть $\mathscr{B}(E, F)$ — пространство всех непрерывных билинейных форм на $E \times F$ (где E и F наделены своими исходными топологиями); тогда $\mathscr{B}(E, F) \subset \mathfrak{B}(E, F)$.

Предложение 1. *Для того чтобы билинейная форма* $\Phi \in \mathfrak{B}(E, F)$ *принадлежала* $\mathscr{B}(E, F)$, *необходимо и достаточно, чтобы в* E *существовала окрестность нуля, образ которой при отображении* ${}^l\Phi$ *есть равностепенно непрерывное множество в* F'.

В самом деле, непрерывность отображения Φ означает, что в E и F существуют соответственно такие выпуклые окрестности нуля V и W, что $|\Phi(x, y)| \leqslant 1$ для всех $x \in V$, $y \in W$; это записывается в виде $|\langle {}^l\Phi(x), y\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in V$, $y \in W$ или еще ${}^l\Phi(V) \subset W^\circ$; а это как раз то, что требовалось доказать.

Следствие. *Если Φ—непрерывная билинейная форма на $E \times F$, то ${}^l\Phi$ — непрерывное линейное отображение пространства E в сильное сопряженное F'_b к F. Если при этом E и F — нормированные пространства, то $\|{}^l\Phi\| = \|\Phi\|$.*

Первое утверждение вытекает из предложения 1 и того, что всякая окрестность нуля в F'_b поглощает любое равностепенно непрерывное подмножество из F'. Если же E и F — нормированные пространства, то

$$\|\Phi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1} |\Phi(x, y)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left(\sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle {}^l\Phi(x), y\rangle| \right) =$$
$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|{}^l\Phi(x)\| = \|{}^l\Phi\|,$$

т. е. справедливо и второе утверждение.

Поменяв местами E и F, получим результаты, аналогичные предложению 1 и его следствию, для линейных отображений ${}^r\Phi$; формулировку их предоставляем читателю.

2. *Некоторые типы пространств, обладающих свойством* (GDF)

Мы уже знаем, что всякое пространство Фреше обладает свойством (GDF) (Топ. вект. простр., гл. I, § 3, следствие 5 теоремы 1).

Предложение 2. *Пусть E—векторное пространство, $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$—семейство локально выпуклых пространств, обладающих свойством* (GDF), *и h_α для каждого $\alpha \in A$ есть линейное отображение F_α в E. Если наделить E сильнейшей локально выпуклой топологией, при которой все h_α непрерывны, то оно будет обладать свойством* (GDF).

Пусть u — такое линейное отображение пространства E в банахово пространство B, что всякий предел в $E \times B$ любой сходящейся последовательности точек его графика Γ снова принадлежит Γ. Достаточно показать, что $u \circ h_\alpha$ при всех $\alpha \in A$ непрерывно на

F_α (Топ. вект. простр., гл. II, § 2, следствие предложения 1). Итак, пусть (x_n) — последовательность элементов из F_α, имеющая предел a и такая, что последовательность $(u(h_\alpha(x_n)))$ имеет предел $b \in B$. Так как h_α непрерывно, то $h_\alpha(a)$ служит пределом последовательности $(h_\alpha(x_n))$ в E; следовательно, в силу предположения, $b = u(h_\alpha(a))$, а так как F_α обладает свойством (GDF), то $u \circ h_\alpha$ непрерывно.

Следствие. *Всякое факторпространство локально выпуклого пространства, обладающего свойством* (GDF), *обладает свойством* (GDF).

Предложение 3. *Сильное сопряженное к рефлексивному пространству Фреше обладает свойством* (GDF).

Это вытекает из предложения 2 и следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть F — пространство Фреше, F' — его сильное сопряженное и F'' — второе сопряженное. Если всякое подмножество из F'', ограниченное в топологии $\sigma(F'', F')$, содержится в замыкании (для $\sigma(F'', F')$) некоторого ограниченного подмножества из F, то F' есть индуктивный предел последовательности банаховых пространств.*

В самом деле, пусть (V_n) — убывающая фундаментальная последовательность замкнутых уравновешенных выпуклых окрестностей нуля в F. Пусть G_n для любого целого n — подпространство пространства F', порожденное полярой V_n° окрестности V_n. V_n° является в G_n поглощающим выпуклым множеством, и, значит, его калибровочная функция p_n есть норма на G_n; кроме того, V_n° — полное подмножество сильного сопряженного F' (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 4); следовательно, G_n, наделенное нормой p_n, есть банахово пространство (Топ. вект. простр., гл. I, § 1, следствие предложения 8). Мы покажем, что сильная топология в F' есть индуктивный предел топологий этих банаховых пространств G_n или, еще, что для того, чтобы сильно замкнутое уравновешенное выпуклое множество U в F' было сильной окрестностью нуля, необходимо и достаточно, чтобы оно поглощало каждое из множеств V_n°. Необходимость этого условия очевидна; достаточность будет установлена, если будет доказано, что U содержит некоторую *бочку* из F'. Действительно, тогда его поляра

U° в F'' будет ограничена в топологии $\sigma(F'', F')$ и, значит, по условию, будет содержаться в замыкании (в топологии $\sigma(F'', F')$) некоторого ограниченного подмножества B пространства F, откуда будет следовать, что U (которое замкнуто в топологии $\sigma(F', F'')$) содержит сильную окрестность нуля B° (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, предложение 3).

Согласно предположению, для каждого целого n существует такое число $\lambda_n > 0$, что $\lambda_n V_n^\circ \subset \frac{1}{2} U$; пусть A_n — выпуклая оболочка объединения всех множеств $\lambda_i V_i^\circ$ с $i \leqslant n$. Имеем $A_n \subset \frac{1}{2} U$ для всех n; обозначим через W объединение множеств A_n; это — поглощающее уравновешенное выпуклое множество, содержащееся в $\frac{1}{2} U$, и нам достаточно показать, что его сильное замыкание (являющееся бочкой) содержится в U.

Итак, пусть x' — точка пространства F', не принадлежащая U. Так как каждое из множеств V_n° компактно в топологии $\sigma(F', F)$, то это верно и для A_n (Топ. вект. простр., гл. II, § 4, предложение 1), и поскольку $x' \notin 2A_n$, то существует элемент x_n, принадлежащий поляре множества A_n в F и такой, что $\langle x', x_n \rangle = 2$ (Топ. вект. простр., гл. II, § 3, предложение 4). Последовательность (x_n) ограничена в F: действительно, всякое $y' \in F'$ принадлежит некоторому V_k°, и, следовательно, $|\langle y', x_n \rangle| \leqslant \lambda_k^{-1}$ для всех $n \geqslant k$, откуда и вытекает наше утверждение (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, теорема 3). Обозначим через C уравновешенное выпуклое ограниченное множество в F, содержащее все x_n; тогда C° будет окрестностью нуля в F', и, значит, поляра $C^{\circ\circ}$ множества C° в F'' будет компактным множеством в топологии $\sigma(F'', F')$ (Топ вект. простр., гл. IV, § 2, предложение 2). Это показывает, что последовательность (x_n) обладает предельной точкой x'' в F'' в топологии $\sigma(F'', F')$; ясно, что $\langle x', x'' \rangle = 2$, а с другой стороны, x'' принадлежит поляре множества A_n в F'' при любом n и, значит, поляре W° множества W в F''. Отсюда заключаем, что $x' \notin W^{\circ\circ}$ и, стало быть, x' не есть точка прикосновения множества W в топологии $\sigma(F', F'')$ (Топ. вект. простр., гл. IV, § 1, предложение 3) и, тем более, в сильной топологии, чем и завершается доказательство.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ VI

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце этого очерка)

С развитием в XIX веке «векторного исчисления» возникла потребность интегрировать векторные функции, но, поскольку речь шла только о функциях со значениями в конечномерных пространствах, эта операция не составляла никакой проблемы. Лишь со спектральной теорией Гильберта появляются операции, естественно приводящие к более общему понятию интеграла: в самом деле, эта теория сопоставляет всякой непрерывной эрмитовой форме $\Phi(x, y)$ на гильбертовом пространстве H семейство $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbf{R}}$ ортогональных проекторов, обладающее тем свойством, что для любой пары (x, y) векторов из H функция $\lambda \longmapsto (E(\lambda)x \mid y)$ имеет ограниченное изменение и

$$\Phi(x, y) = \int \lambda d\,((E(\lambda)\,x \mid y));$$

если сопоставить Φ эрмитов оператор A, для которого $\Phi(x, y) = (Ax \mid y)$, то напрашивается запись предыдущей формулы в виде $A = \int \lambda\, dE(\lambda)$. И все же определением интеграла от вектор-функций (или интеграла относительно векторной меры), так, чтобы сделать законными формулы типа предыдущей, начали вплотную заниматься только примерно с 1935 года после введения Бохнером («сильного») интегрирования функции со значениями в банаховом пространстве. Это распространение было в основном осуществлено Гельфандом (III), Данфордом и Петтисом ((IV) и (V)); их результаты сформулированы для банаховых пространств, однако они без труда распространяются на более общие локально выпуклые пространства.

Идея разбиения объема на «срезы» и сведения интеграла по этому объему к интегралу по каждому срезу с последующим простым интегрированием всегда использовалась в анализе, начиная с зарождения исчисления бесконечно малых («Исчисление неделимых» Кавальери является первым наброском этого принципа, истоки которого можно

было бы найти уже у Архимеда (см. Исторический очерк к книге IV, гл. I — III)). Но в классических применениях «срезы» имели всегда весьма специальную и простую природу (чаще всего это — открытые подмножества аналитических поверхностей, аналитически зависящих от параметра); впрочем, при отсутствии общей теории интегрирования иначе и не могло быть. Общая проблема дезинтегрирования меры была поставлена и решена фон Нейманом в 1932 году в связи с эргодической теорией (I); почти в то же время (и независимо) Колмогоров, закладывая аксиоматические основы теории вероятностей, пришел к общему определению понятия «условной вероятности» и доказал ее существование, что, по существу, эквивалентно проблеме дезинтегрирования меры (II).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) J. von N e u m a n n, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. of Math., (2), t. XXXIII (1932), стр. 587—642.

(II) A. K o l m o g o r o f f, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin (Springer), 1933.
[А. Н. К о л м о г о р о в, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ 1936.]

(III) I. G e l f a n d, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Матем. сб. (н.т.), т. IV (1938), стр. 235—284.

(IV) N. D u n f o r d, Uniformity in linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., t. XLIV (1938), стр. 305—356.

(V) N. D u n f o r d and B. P e t t i s, Linear operations on summable functions, Trans. Amer. Math. Soc., t. XLVII (1940), стр. 323—392.

ГЛАВА VII

МЕРА ХААРА

В этой и следующей главах, когда будет говориться о функции (соответственно мере), то безразлично, будет ли идти речь о функции (соответственно мере) действительной или комплексной; если T — локально компактное пространство, то под $\mathscr{K}(T)$ будет пониматься как $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(T)$, так и $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}(T)$; то же самое относится и к обозначениям $\overline{\mathscr{K}(T)}$, $\mathscr{C}(T)$, $L^p(T, \mu)$, $\mathscr{M}(T)$ и т. д.

Естественно, подразумевается, что если в рассматриваемый вопрос входит несколько функций, мер или векторных пространств, то полученные результаты справедливы, когда все эти функции, меры или векторные пространства действительны или же все комплексны.

Пространство $\overline{\mathscr{K}(T)}$ будет всегда предполагаться наделенным топологией равномерной сходимости, пространство $\mathscr{C}(T)$—топологией компактной сходимости, а пространство $\mathscr{K}(T)$—топологией — индуктивным пределом, определение которой напоминалось в начале VI главы.

Через $\mathscr{K}_+(T)$ будет обозначаться множество всех положительных функций из $\mathscr{K}(T)$. Для $A \subset T$ через φ_A будет всегда обозначаться характеристическая функция множества A.

Для $t \in T$ через ε_t будет обозначаться положительная мера с массой $+1$, сосредоточенной в точке t.

Все локально выпуклые пространства будут предполагаться отделимыми.

Через e, если не будет оговорено противное, будут обозначаться нейтральные элементы всех рассматриваемых групп.

§ 1. Построение меры Хаара

1. *Определения и обозначения*

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно слева (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 4) в локально компактном пространстве X; пусть, далее, sx для $s \in G$ и $x \in X$ означает результат преобразования элемента x при помощи s. Обозначим через $\gamma_X(s)$ или $\gamma(s)$ гомеоморфизм пространства X на X, определенный формулой

$$\gamma(s)x = sx. \tag{1}$$

Имеем

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t). \tag{2}$$

Если f есть функция, определенная на X, то $\gamma(s)f$ будет определяться перенесением структуры, то есть формулой $(\gamma(s)f)(\gamma(s)x) = f(x)$, или иначе,

$$(\gamma(s)f)(x) = f(s^{-1}x). \tag{3}$$

Если μ есть мера, определенная на X, то и $\gamma(s)\mu$ будет определяться перенесением структуры, что приводит к формуле

$$\langle f, \gamma(s)\mu\rangle = \langle\gamma(s^{-1})f, \mu\rangle \text{ для } f \in \mathscr{K}(X), \tag{4}$$

или, иначе,

$$\int_X f(x)\, d(\gamma(s)\mu)(x) = \int_X f(sx)\, d\mu(x). \tag{5}$$

Если A есть $(\gamma(s)\mu)$-интегрируемое множество, то $s^{-1}A$ μ-интегрируемо и

$$(\gamma(s)\mu)(A) = \mu(s^{-1}A). \tag{6}$$

Мера $\gamma(s)\mu$ может быть также определена как *образ* меры μ при отображении $\gamma(s)$.

Иногда бывает удобно вместо записи $d(\gamma(s)\mu)(x)$ использовать запись $d\mu(s^{-1}x)$; тогда формула (5) принимает вид

$$\int_X f(x)\, d\mu(s^{-1}x) = \int_X f(sx)\, d\mu(x);$$

правая часть получается из левой «заменой x на sx».

Определение 1. *Пусть* μ — *мера на* X. *Говорят, что* μ

a) *инвариантна относительно* G, *если* $\gamma(s)\mu = \mu$ *для каждого* $s \in G$;

b) *относительно инвариантна относительно* G, *если* $\gamma(s)\mu$ *пропорциональна* μ *для каждого* $s \in G$;

c) *квазиинвариантна относительно* G, *если* $\gamma(s)\mu$ *эквивалентна* μ *для каждого* $s \in G$;

Замечания. 1) Предположим, что μ инвариантна. Тогда $|\mu|$, $\mathfrak{R}\mu$, $\mathfrak{J}\mu$ инвариантны. Если μ действительна, то μ^+ и μ^- инвариантны.

2) Предположим, что μ — относительно инвариантная и ненулевая. Для каждого $s \in G$ существует, и притом единственное, такое комплексное число $\chi(s)$, что

$$\gamma(s)\mu = \chi(s)^{-1}\mu, \tag{7}$$

и функция χ на G является представлением G в $\mathbf{C}^*$, называемым *мультипликатором* меры μ. Тогда формула (5) дает равенство

$$\int_X f(sx)\, d\mu(x) = \chi(s)^{-1} \int_X f(x)\, d\mu(x), \tag{8}$$

а формула (6) — равенство

$$\mu(sA) = \chi(s)\mu(A). \tag{9}$$

С учетом принятых выше соглашений формула (7) может быть записана также в виде

$$d\mu(sx) = \chi(s)d\mu(x). \tag{10}$$

3) Поскольку $|\gamma(s)\mu| = \gamma(s)(|\mu|)$, то утверждение, что μ квазиинвариантна, сводится к утверждению, что $|\mu|$ квазиинвариантна.

Если μ квазиинвариантна и μ' — мера на X, эквивалентная μ, то $\gamma(s)\mu'$ эквивалентна $\gamma(s)\mu$, значит и μ, а потому и μ', так что μ' квазиинвариантна. Следовательно, утверждение, что μ квазиинвариантна относительно G, означает, что *класс* меры μ инвариантен относительно G.

Для того чтобы μ была квазиинвариантна, необходимо и достаточно, чтобы множество локально μ-пренебрежимых подмножеств из X было инвариантно относительно G (гл. V, § 5, теорема 2) или еще чтобы для любого μ-пренебрежимого компактного множества

K из X и любого $s \in G$ множество sK было μ-пренебрежимо (там же, замечание).

Если μ квазиинвариантна, то носитель меры μ инвариантен относительно G. В частности, если G *транзитивна* в X, то этот носитель либо пуст (если $\mu = 0$), либо равен X (если $\mu \neq 0$).

Лемма 1. *Пусть X, Y, Z — топологические пространства, причем Y локально компактно. Пусть, далее, $(x, y) \mapsto xy$ есть непрерывное отображение $X \times Y$ в Z, определяющее посредством соотношения $u_x(y) = xy$ отображение $x \mapsto u_x$ пространства X в $\mathscr{F}(Y; Z)$. Пусть, наконец, f есть непрерывная функция на Z со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в некотором банаховом пространстве, S — носитель функции f и μ — мера на Y. Предположим, что для любого $x_0 \in X$ в X существует такая его окрестность V, что $\bigcup_{x \in V} u_x^{-1}(S)$ относительно компактно в Y. Тогда:*

a) *для любого $x \in X$ функция $f \circ u_x$ непрерывна на Y и имеет компактный носитель;*

b) *отображение $x \mapsto \int_Y f(xy)\,d\mu(y)$, которое определено в силу* a), *непрерывно на X.*

Утверждение a) очевидно. Докажем b). Так как непрерывность есть свойство локальное, то все сводится к случаю, когда $\bigcup_{x \in X} u_x^{-1}(S)$ содержится в некотором компактном множестве $Y' \subset Y$. А поскольку функция $(x, y) \mapsto f(xy)$ непрерывна на $X \times Y$, $f \circ u_x$ равномерно стремится к $f \circ u_{x_0}$ на Y', когда x стремится к x_0 (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 3, теорема 3), и, значит, $\mu(f \circ u_x)$ стремится к $\mu(f \circ u_{x_0})$, что и доказывает лемму.

Вернемся теперь к прежним обозначениям.

Предложение 1. *Предположим, что G локально компактна. Если μ — относительно инвариантная ненулевая мера на X, то ее мультипликатор χ есть непрерывная функция на G.*

В самом деле, пусть $f \in \mathscr{K}(X)$, S — носитель f, s_0 — точка из G и V — некоторая ее компактная окрестность в G; тогда

$$\bigcup_{s \in V} \gamma(s)^{-1}(S) = V^{-1}S$$

компактно в X; согласно лемме 1 и формуле (8), $\chi(s)^{-1}\langle\mu, f\rangle$ непрерывно зависит от s; выбрав f так, чтобы $\langle\mu, f\rangle\neq 0$, видим, что χ непрерывна.

Пусть теперь G — топологическая группа, действующая непрерывно справа в локально компактном пространстве X; пусть, далее, xs для $s\in G$ и $x\in X$ означает результат преобразования элемента x при помощи s. Обозначим через $\delta_X(s)$ или $\delta(s)$ гомеоморфизм пространства X, определенный формулой

$$\delta(s)x = xs^{-1}. \tag{1'}$$

Имеем

$$\delta(st) = \delta(s)\delta(t). \tag{2'}$$

Действие гомеоморфизма $\delta(s)$ на функции и меры на X определяется перенесением структуры:

$$(\delta(s)f)(x) = f(xs), \tag{3'}$$

$$\langle f, \delta(s)\mu\rangle = \langle\delta(s^{-1})f, \mu\rangle, \tag{4'}$$

$$\int_X f(x)\,d(\delta(s)\mu)(x) = \int_X f(xs^{-1})\,d\mu(x), \tag{5'}$$

$$(\delta(s)\mu)(A) = \mu(As). \tag{6'}$$

Условимся вместо $d(\delta(s)\mu)(x)$ писать $d\mu(xs)$; тогда (5′) принимает вид

$$\int_X f(x)\,d\mu(xs) = \int_X f(xs^{-1})\,d\mu(x).$$

Аналогичным образом определяются инвариантные, относительно инвариантные и квазиинвариантные относительно G меры на X. Если μ относительно инвариантна, то ее мультипликатор χ определяется формулами

$$\delta(s)\mu = \chi(s)\mu, \tag{7'}$$

$$\int_X f(xs)\,d\mu(x) = \chi(s)^{-1}\int_X f(x)\,d\mu(x), \tag{8'}$$

$$\mu(As) = \chi(s)\mu(A), \tag{9'}$$

$$d\mu(xs) = \chi(s)d\mu(x). \tag{10'}$$

Если рассматривать группу G°, противоположную G, как действующую в X по закону $(x, s)\longmapsto xs$, то μ будет относительно инвариантна относительно G° с тем же мультипликатором χ.

Наконец, пусть G — локально компактная группа. Она действует в себе как группа левых или правых переносов по формулам $\gamma(s)x = sx$, соотв. $\delta(s)x = xs^{-1}$. Имеем

$$\gamma(s)\delta(t) = \delta(t)\gamma(s). \tag{11}$$

Все вышесказанное применимо, и, стало быть, на G существуют понятия *левоинвариантных*, *правоинвариантных*, *относительно левоинвариантных*, *относительно правоинвариантных*, *левоквазиинвариантных* и *правоквазиинвариантных* мер (ср., однако, n°n° 8 и 9).

Отображение $x \mapsto x^{-1}$ есть гомеоморфизм группы G на G. Определим для любой функции f на G функцию $\check{f}$ на G равенством

$$\check{f}(x) = f(x^{-1}). \tag{12}$$

Для любой меры μ на G определим меру $\check{\mu}$ равенством

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}) \quad \text{для} \quad f \in \mathscr{K}(G), \tag{13}$$

или, иначе,

$$\int_G f(x)\, d\check{\mu}(x) = \int_G f(x^{-1})\, d\mu(x). \tag{14}$$

Если A есть $\check{\mu}$-интегрируемое множество, то A^{-1} μ-интегрируемо и

$$\check{\mu}(A) = \mu(A^{-1}). \tag{15}$$

Условимся вместо $d\check{\mu}(x)$ писать $d\mu(x^{-1})$, и тогда (14) примет вид

$$\int_G f(x)\, d\mu(x^{-1}) = \int_G f(x^{-1})\, d\mu(x).$$

2. Теорема существования и единственности

Определение 2. *Пусть G — локально компактная группа. Левой* (соотв. *правой*) *мерой Хаара на G называется лево-* (соотв. *право-*)*инвариантная положительная ненулевая мера на G.*

Теорема 1. *На всякой локально компактной группе существует, и притом единственная с точностью до постоянного множителя, левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара.*

A) *Существование.* Положим $\mathscr{K}(G) = \mathscr{K}$, $\mathscr{K}_+(G) = \mathscr{K}_+$,

$$\mathscr{K}_+^* = \mathscr{K}_+ - \{0\}.$$

Для каждого компактного множества C из G обозначим через $\mathscr{K}_+^*(C)$

множество всех функций $f \in \mathscr{K}_+^*$ с носителем в C. Для $f \in \mathscr{K}$ и $g \in \mathscr{K}_+^*$ найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_n \geqslant 0$ и такие элементы $s_1, \ldots, s_n$ из G, что $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma(s_i) g$: действительно, в G существует такое непустое открытое множество U, что $\inf_{s \in U} g(s) > 0$, и носитель функции f может быть покрыт конечным числом левых переносов множества U. Пусть $(f : g)$ есть нижняя грань чисел $\sum_{i=1}^{n} c_i$ для всех систем $(c_1, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n)$ чисел $\geqslant 0$ и элементов из G, удовлетворяющих условию $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma(s_i) g$. Тогда:

(I) $(\gamma(s) f : g) = (f : g)$ для $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $s \in G$;

(II) $(\lambda f : g) = \lambda (f : g)$ для $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $\lambda \geqslant 0$;

(III) $((f + f') : g) \leqslant (f : g) + (f' : g)$ для $f \in \mathscr{K}$, $f' \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$;

(IV) $(f : g) \geqslant (\sup f)/(\sup g)$ для $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$;

(V) $(f : h) \leqslant (f : g)(g : h)$ для $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $h \in \mathscr{K}_+^*$;

(VI) $0 < \frac{1}{(f_0 : f)} \leqslant \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leqslant (f : f_0)$ для f, f_0, g из $\mathscr{K}_+^*$;

(VII) пусть f, f' и h принадлежат $\mathscr{K}_+$, причем $h(s) \geqslant 1$ на носителе функции $f + f'$, и пусть $\varepsilon > 0$; существует такая компактная окрестность V элемента e, что для любого $g \in \mathscr{K}_+^*(V)$ выполняется неравенство

$$(f : g) + (f' : g) \leqslant ((f + f') : g) + \varepsilon (h : g).$$

Свойства I, II и III очевидны. Далее, пусть $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$; если $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma(s_i) g$, где $c_i \geqslant 0$, то

$$\sup f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i g(s_i^{-1} s)$$

для некоторого $s \in G$, и, значит, $\sup f \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \sup g$, откуда следует (IV). Докажем (V); пусть $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathscr{K}_+^*$, $h \in \mathscr{K}_+^*$; если $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma(s_i) g$ и $g \leqslant \sum_{j=1}^{p} d_j \gamma(t_j) h$ $(c_i \geqslant 0, d_j \geqslant 0, s_i \in G, t_j \in G)$, то $f \leqslant \sum_{i, j} c_i d_j \gamma(s_i t_j) h$, и, стало быть, $(f : h) \leqslant \sum_{i, j} c_i d_j = \left(\sum_i c_i\right)\left(\sum_j d_j\right)$; следовательно, $(f : h) \leqslant (f : g)(g : h)$. Применяя (V) с одной

стороны к f_0, f, g, а с другой стороны к f, f_0, g, получаем (VI). И, наконец, пусть f, f', $h \in \mathscr{K}_+$, причем $h(s) \geqslant 1$ на носителе функции $f+f'$, и пусть $\varepsilon > 0$. Положим $F = f + f' + \frac{1}{2}\varepsilon h$; функции φ и φ', совпадающие соответственно с f/F и f'/F на носителе функции $f+f'$ и обращающиеся вне его в нуль, принадлежат $\mathscr{K}_+$; для любого $\eta > 0$ существует такая компактная окрестность V элемента e, что $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leqslant \eta$ и $|\varphi'(s) - \varphi'(t)| \leqslant \eta$, когда $s^{-1}t \in V$. Пусть $g \in \mathscr{K}_+^*(V)$; для любого $s \in G$ имеем $\varphi \cdot \gamma(s) g \leqslant (\varphi(s) + \eta) \cdot \gamma(s) g$: в самом деле, для точек, в которых $\gamma(s) g$ обращается в нуль, и, значит, вне sV, это очевидно, а на sV имеем $\varphi \leqslant \varphi(s) + \eta$; точно так же

$$\varphi' \cdot \gamma(s) g \leqslant (\varphi'(s) + \eta) \cdot \gamma(s) g.$$

Пусть теперь $c_1, \ldots, c_n$ — числа $\geqslant 0$ и $s_1, \ldots, s_n$ — элементы из G, для которых $F \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma(s_i) g$; тогда

$$f = \varphi F \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi \cdot \gamma(s_i) g \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i (\varphi(s_i) + \eta) \cdot \gamma(s_i) g,$$

и то же самое имеет место для f'; следовательно,

$$(f:g) + (f':g) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i (\varphi(s_i) + \varphi'(s_i) + 2\eta) \leqslant (1 + 2\eta)] \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

поскольку $\varphi + \varphi' \leqslant 1$. Отсюда, применяя определение функции F, а затем (II), (III) и (V), заключаем, что

$$\begin{aligned}(f:g) + (f':g) &\leqslant (1+2\eta)(F:g) \leqslant \\ &\leqslant (1+2\eta)\left[((f+f'):g) + \frac{1}{2}\varepsilon(h:g)\right] \leqslant \\ &\leqslant ((f+f'):g) + \frac{1}{2}\varepsilon(h:g) + 2\eta((f+f'):h)(h:g) + \varepsilon\eta(h:g),\end{aligned}$$

и, выбрав η так, чтобы $\eta[2((f+f'):h) + \varepsilon] \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$, получим (VII).

Когда V пробегает множество всех компактных окрестностей элемента e, множества $\mathscr{K}_+^*(V)$ образуют базис фильтра $\mathfrak{B}$ в $\mathscr{K}_+^*$. Пусть $\mathfrak{F}$ ультрафильтр в $\mathscr{K}_+^*$, мажорирующий $\mathfrak{B}$. С другой стороны, зафиксируем $f_0 \in \mathscr{K}_+^*$ и для любых $f \in \mathscr{K}_+^*$ и $g \in \mathscr{K}_+^*$ положим

$$I_g(f) = \frac{(f:g)}{(f_0:g)}.$$

В силу (VI), на компактном пространстве $[1/(f_0 : f), (f : f_0)]$ существует $\lim\limits_{g,\mathfrak{F}} \mathrm{I}_g(f) = I(f)$. В силу (III), $I(f + f') \leqslant I(f) + I(f')$. В силу (VII), $I(f) + I(f') \leqslant I(f + f') + \varepsilon I(h)$ при любом $\varepsilon > 0$, если $h \geqslant 1$ на носителе функции $f + f'$; следовательно, $I(f + f') = I(f) + I(f')$. В силу предложения 2 § 2 главы II, I продолжается до линейной формы на $\mathscr{K}$; эта линейная форма есть ненулевая положительная мера на G, левоинвариантная в силу (I); это и есть искомая левая мера Хаара. Переходя к противоположной группе, получим отсюда существование правой меры Хаара.

B) *Единственность.* Пусть μ — левая, а ν — правая меры Хаара. Тогда $\check{\nu}$ есть левая мера Хаара. Покажем, что μ и $\check{\nu}$ пропорциональны. Тем самым и будет доказано, что две левые меры Хаара пропорциональны.

Пусть $f \in \mathscr{K}$ такова, что $\mu(f) \neq 0$. Согласно лемме 1 функция D_f, определенная на G формулой

$$D_f(s) = \mu(f)^{-1} \int f(t^{-1}s)\, d\nu(t), \tag{16}$$

непрерывна на G. Пусть $g \in \mathscr{K}$. Функция $(s, t) \longmapsto f(s)\, g(ts)$ есть непрерывная функция на $G \times G$ с компактным носителем. В силу теоремы 2 § 5 главы III

$$\begin{aligned}
\mu(f)\,\nu(g) &= \Big(\int f(s)\, d\mu(s)\Big)\Big(\int g(t)\, d\nu(t)\Big) = \\
&= \int d\mu(s) \int f(s)\, g(ts)\, d\nu(t) = \int d\nu(t) \int f(s)\, g(ts)\, d\mu(s) = \\
&= \int d\nu(t) \int f(t^{-1}s)\, g(s) d\mu(s) = \\
&= \int g(s) \Big[\int f(t^{-1}s)\, d\nu(t)\Big] d\mu(s) = \mu(g \cdot \mu(f)\, D_f),
\end{aligned} \tag{17}$$

откуда

$$\nu(g) = \mu(D_f \cdot g). \tag{18}$$

Это доказывает, прежде всего, что D_f не зависит от f, так как если $f' \in \mathscr{K}$ такова, что $\mu(f') \neq 0$, то $D_f \cdot \mu = D_{f'} \cdot \mu$, так что $D_f = D_{f'}$ локально почти всюду относительно μ, а значит, и всюду, поскольку D_f и $D_{f'}$ непрерывны, а носителем меры μ служит G. Итак, положим, $D_f = D$. Формула (16) дает

$$\mu(f)\, D(e) = \check{\nu}(f). \tag{19}$$

Формула (19) распространяется по линейности и на функции $f \in \mathscr{K}$, для которых $\mu(f) = 0$. Так как $\check{\nu} \neq 0$, то $D(e) \neq 0$. Тем самым пропорциональность μ и $\check{\nu}$ доказана.

Следствие. *Всякая лево-* (соотв. *право-*) *инвариантная мера на G пропорциональна левой* (соотв. *правой*) *мере Хаара.*

Примеры. 1) Мера Лебега dx на аддитивной группе $\mathbf{R}$ есть мера Хаара (гл. III, § 2, n° 2, пример).

2) Для каждой функции $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}_+^*)$ имеем (Функции действ. перем., гл. II, § 1, формула (13))

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(tx)}{tx}\, t\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(tx)}{x}\, dx$$

при любом $t > 0$; следовательно, мера $x^{-1}\,dx$ есть мера Хаара на мультипликативной группе $\mathbf{R}_+^*$.

3) Возьмем в качестве G тор $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Пусть φ —каноническое отображение $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T}$. Для любого $f \in \mathscr{K}(\mathbf{T})$ функция $f \circ \varphi$ — непрерывная периодическая с периодом 1 на $\mathbf{R}$, а интеграл

$$I(f) = \int_a^{a+1} f(\varphi(x))\, dx$$

не зависит от выбора $a \in \mathbf{R}$; непосредственно видно, что он инвариантен относительно переноса; значит, он определяет на $\mathbf{T}$ меру Хаара. Перенесением структуры выводим отсюда, что $I(f) = \int_a^{a+1} f(e^{2\pi i t})\, dt$ есть мера Хаара на мультипликативной группе $\mathbf{U}$ комплексных чисел с абсолютным значением 1 (Общ. топ., гл. VIII, § 2, n° 1).

Предложение 2. *Пусть G — локально компактная группа, а μ — левая или правая мера Хаара на G. Для того чтобы G была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\{e\}) > 0$. Для того чтобы G была компактна, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^*(G) < +\infty$.*

Необходимость условий очевидна. Покажем их достаточность. Пусть V — компактная окрестность элемента e. Если $\mu(\{e\}) > 0$,

то V — конечное множество, поскольку $\mu(V) < +\infty$; поэтому G, будучи отделимой, дискретна. Предположим, что $\mu^*(G) < +\infty$, а μ, скажем, левоинвариантна. Рассмотрим множество $\mathscr{E}$ всех таких конечных подмножеств $\{s_1, \ldots, s_n\}$ из G, что $s_i V \cap s_j V = \varnothing$ при $i \neq j$; имеем

$$n\mu(V) = \mu(s_1 V \cup \ldots \cup s_n V) \leqslant \mu^*(G),$$

и, стало быть, $n \leqslant \mu^*(G)/\mu(V)$. Следовательно, можно выбрать в $\mathscr{E}$ максимальный элемент $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Тогда для любого $s \in G$ найдется такое i, что $sV \cap s_i V \neq \varnothing$, то есть такое, что $s \in s_i V V^{-1}$. Таким образом, G является объединением компактных множеств $s_i V V^{-1}$ и, значит, компактно.

3. *Модуль*

Пусть μ — левая мера Хаара на G. При любом $s \in G$ мера $\delta(s)\mu$ снова левоинвариантна (n° 1, формула (11)), и, значит (теорема 1), существует единственное число $\Delta_G(s) > 0$, такое, что $\delta(s)\mu = \Delta_G(s)\mu$. Согласно теореме 1, число $\Delta_G(s)$ не зависит от выбора меры μ.

Определение 3. *Функция Δ_G на G называется модулем группы G. Если $\Delta_G = 1$, то группа G называется унимодулярной.*

Можно также сказать, что μ есть относительно правоинвариантная мера с мультипликатором Δ_G. Следовательно, Δ_G есть *непрерывное представление группы G в* $\mathbf{R}_+^*$ (предложение 1).

Замечание. Если φ есть изоморфизм группы G на локально компактную группу G', то $\Delta_{G'} \circ \varphi = \Delta_G$. В частности:

1) Так как $x \mapsto x^{-1}$ есть изоморфизм группы G на противоположную группу G°, то $\Delta_{G^\circ} = \Delta_G^{-1}$.

2) Если φ — автоморфизм группы G, то $\Delta_G \circ \varphi = \Delta_G$.

Пусть $s \in G$. Тгода:

$$\delta(s)(\Delta_G^{-1} \cdot \mu) = (\delta(s)\Delta_G^{-1}) \cdot (\delta(s)\mu) = (\Delta_G(s)^{-1}\Delta_G^{-1})(\Delta_G(s)\mu) = \Delta_G^{-1} \cdot \mu,$$

и, стало быть, $\Delta_G^{-1} \cdot \mu = \mu'$ есть правая мера Хаара. Отсюда вытекает, что $\gamma(s)\mu' = (\gamma(s)\Delta_G^{-1}) \cdot \mu = \Delta_G(s)(\Delta_G^{-1} \cdot \mu) = \Delta_G(s)\mu'$, и, значит, для всякой правой меры Хаара ν имеем $\gamma(s)\nu = \Delta_G(s)\nu$. А так

как $\check{\mu}$ есть правая мера Хаара, то $\check{\mu} = a\Delta_G^{-1} \cdot \mu$ с некоторой постоянной $a > 0$; отсюда

$$\mu = a\,(\Delta_G^{-1} \cdot \mu)^{\vee} = a\Delta_G \cdot \check{\mu} = a^2\mu,$$

так что $a = 1$ и, окончательно, $\check{\mu} = \Delta_G^{-1} \cdot \mu$. Точно так же доказывается, что $\check{\nu} = \Delta_G \cdot \nu$. Итак, получаем следующие результаты:

Сводка. Пусть G — локально компактная группа, Δ — ее модуль, μ — левая мера Хаара и ν — правая мера Хаара.

1) Имеем

$$\gamma(s)\,\mu = \mu, \quad \delta(s)\,\mu = \Delta(s)\,\mu, \quad \check{\mu} = \Delta^{-1} \cdot \mu. \tag{20}$$

Если f μ-интегрируема на G, то левые и правые переносы функции f μ-интегрируемы и

$$\begin{aligned} \int f(sx)\,d\mu(x) &= \int f(x)\,d\mu(x), \\ \int f(xs)\,d\mu(x) &= \Delta(s)^{-1} \int f(x)\,d\mu(x). \end{aligned} \tag{21}$$

Кроме того, $\check{f}$ интегрируема относительно $\Delta^{-1} \cdot \mu$ и

$$\int f(x^{-1})\,\Delta(x)^{-1}\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x). \tag{22}$$

Если A есть μ-интегрируемое подмножество в G, то sA и As μ-интегрируемы и

$$\mu(sA) = \mu(A), \qquad \mu(As) = \Delta(s)\,\mu(A). \tag{23}$$

2) Имеем

$$\delta(s)\,\nu = \nu, \qquad \gamma(s)\,\nu = \Delta(s)\,\nu, \qquad \check{\nu} = \Delta \cdot \nu. \tag{24}$$

Если f ν-интегрируема на G, то левый и правый переносы функции f ν-интегрируемы и

$$\begin{aligned} \int f(xs)\,d\nu(x) &= \int f(x)\,d\nu(x), \\ \int f(sx)\,d\nu(x) &= \Delta(s) \int f(x)\,d\nu(x). \end{aligned} \tag{25}$$

Кроме того, $\check{f}$ интегрируема относительно $\Delta \cdot \nu$ и

$$\int f(x^{-1})\,\Delta(x)\,d\nu(x) = \int f(x)\,d\nu(x). \tag{26}$$

Если A есть ν-интегрируемое подмножество в G, то sA и As ν-интегрируемы и

$$\nu(As) = \nu(A), \qquad \nu(sA) = \Delta(s)^{-1}\,\nu(A). \tag{27}$$

3) Мера ν пропорциональна $\Delta^{-1}\cdot\mu$, а мера μ пропорциональна $\Delta\cdot\nu$.

4) Предположим, что G *унимодулярна*, и пусть μ — мера Хаара на G. Тогда

$$\gamma(s)\,\mu = \delta(s)\,\mu = \check{\mu} = \mu. \tag{28}$$

Если f μ-интегрируема на G, то левый и правый переносы функции f, равно как и $\check{f}$, μ-интегрируемы и

$$\int f(sx)\,d\mu(x) = \int f(xs)\,d\mu(x) = \\ = \int f(x^{-1})\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x). \tag{29}$$

Если A есть μ-интегрируемое подмножество в G, то sA, As и A^{-1} μ-интегрируемы и

$$\mu(sA) = \mu(As) = \mu(A^{-1}) = \mu(A). \tag{30}$$

Аналогичные свойства имеют место для существенного интеграла.

Предложение 3. *Если в G существует компактная окрестность V элемента e, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов, то G унимодулярна.*

В самом деле, пусть μ — левая мера Хаара на G. Для любого $s \in G$ имеем $\mu(V) = \mu(s^{-1}Vs) = \Delta_G(s)\mu(V)$, откуда

$$\Delta_G(s) = 1,$$

поскольку $0 < \mu(V) < +\infty$.

Из этого непосредственно вытекает

Следствие. *Если G дискретна, или компактна, или коммутативна, то G унимодулярна.*

Впрочем, когда G *коммутативна*, это тривиально. Отметим также, что если G *дискретна*, то мера на G, для которой каждая точка имеет массу 1, очевидно, является левой и правой мерой Хаара на G, называемой *нормированной* мерой Хаара на G. Если G *компактна*, то существует, и притом единственная, мера Хаара μ на G такая, что $\mu(G) = 1$; ее называют *нормированной* мерой Хаара на G. Но когда G одновременно дискретна и компактна, то есть конечна, эти два соглашения не совпадают; в этом случае

всегда надо особо уточнять, что следует понимать под нормированной мерой Хаара.

Подгруппа и факторгруппа унимодулярной группы не всегда унимодулярны (§ 2, упражнение 5). Ср., однако, § 2, предложение 10.

°Позже мы покажем, что нильпотентные или полупростые связные группы Ли унимодулярны.°

4. *Модуль автоморфизма*

Пусть G — локально компактная группа, φ — автоморфизм группы G и μ — левая мера Хаара на G. Ясно, что $\varphi^{-1}(\mu)$ снова будет левой мерой Хаара на G. Следовательно, существует (теорема 1), и притом только одно, такое число $a > 0$, что $\varphi^{-1}(\mu) = a\mu$. Согласно теореме 1, это число не зависит от выбора меры μ. Заметим, что, отправляясь от правой меры Хаара, например, $\Delta_G^{-1} \cdot \mu$ (n° 3), мы пришли бы к тому же скаляру a: ибо из того, что φ^{-1} оставляет Δ_G инвариантным (n° 3, замечание), следует, что $\varphi^{-1}(\Delta_G^{-1} \cdot \mu) = \Delta_G^{-1} \cdot \varphi^{-1}(\mu) = a\Delta_G^{-1} \cdot \mu$.

Определение 4. *Число* $a > 0$, *удовлетворяющее равенству* $\varphi^{-1}(\mu) = a\mu$, *называется модулем автоморфизма* φ *и обозначается* $\operatorname{mod}_G \varphi$ *или просто* $\operatorname{mod} \varphi$.

Если f есть μ-интегрируемая функция на G, то

$$\int f(\varphi^{-1}(x))\, d\mu(x) = (\operatorname{mod} \varphi) \int f(x)\, d\mu(x). \tag{31}$$

Если A есть μ-интегрируемое подмножество из G, то

$$\mu(\varphi(A)) = (\operatorname{mod} \varphi)\, \mu(A). \tag{32}$$

В частности, обозначая для $s \in G$ через i_s внутренний автоморфизм $x \mapsto s^{-1}xs$, имеем $i_s^{-1} = \delta(s)\gamma(s)$, значит,

$$i_s^{-1}(\mu) = \delta(s)\mu = \Delta_G(s)\mu,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mod} i_s = \Delta_G(s). \tag{33}$$

Если G дискретна или компактна, то перенесением структуры сразу убеждаемся в том, что при любом автоморфизме φ группы G

ее нормированная мера Хаара переходит в себя. Следовательно, *автоморфизм как дискретной, так и компактной группы имеет модуль* 1.

Предложение 4. *Пусть G — локально компактная группа, Γ — топологическая группа и $\gamma \mapsto u_\gamma$ — такой гомоморфизм группы Γ в группу $\mathfrak{G}$ автоморфизмов группы G, что $(\gamma, x) \mapsto u_\gamma(x)$ есть непрерывное отображение произведения $\Gamma \times G$ в G. Тогда отображение $\gamma \mapsto \operatorname{mod}(u_\gamma)$ есть непрерывное представление группы Γ в $\mathbf{R}_+^*$.*

Очевидно, это отображение есть (алгебраическое) представление группы Γ в $\mathbf{R}_+^*$; достаточно доказать его непрерывность. Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$ и S — носитель f. Пусть, далее, $\gamma_0 \in \Gamma$ и U — относительно компактная окрестность множества $u_{\gamma_0}^{-1}(S)$. Отображение $\gamma \mapsto u_\gamma$ есть непрерывное отображение группы Γ в группу $\mathfrak{G}$, наделенную топологией компактной сходимости (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 3, теорема 3); следовательно, для γ, достаточно близких к γ_0, имеем $u_\gamma^{-1}(S) \subset U$. Тогда лемма 1 показывает, что $\int f(u_\gamma(x))\,d\mu(x)$ (где μ означает левую меру Хаара на G) непрерывно зависит от γ, откуда и следует предложение.

5. Мера Хаара произведения

Предложение 5. *Пусть $(G_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство локально компактных групп. Пусть, далее, μ_ι для каждого $\iota \in I$ — левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара на G_ι. Предположим, что существует такое конечное множество $J \subset I$, что при любом $\iota \in I - J$ группа G_ι компактна и $\mu(G_\iota) = 1$. Тогда мера-произведение $\bigotimes_{\iota\in I} \mu_\iota$ есть левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара на $G = \prod_{\iota\in I} G_\iota$. Если $x = (x_\iota) \in G$, то*

$$\Delta_G(x) = \prod_{\iota\in I} \Delta_{G_\iota}(x_\iota).$$

Из определений сразу же вытекает, что для любого конечного множества $J \subset I$ произведение $\bigotimes_{\iota\in J} \mu_\iota$ есть левая (соотв. правая) мера Хаара на $\prod_{\iota\in J} G_\iota$. Следовательно, $\bigotimes_{\iota\in I} \mu_\iota$ есть левая (соотв. правая) мера Хаара на G (гл. III, § 5, предложение 6). С другой

стороны, если μ_ι — левые меры Хаара, то

$$\delta(x)\,(\bigotimes_{\iota\in I}\mu_\iota) = \bigotimes_{\iota\in I}\delta(x_\iota)\,\mu_\iota = \bigotimes_{\iota\in I}(\Delta_{G_\iota}(x_\iota)\,\mu_\iota) = (\prod_{\iota\in I}\Delta_{G_\iota}(x_\iota))\bigotimes_{\iota\in I}\mu_\iota,$$

откуда $\Delta_G(x) = \prod_{\iota\in I}\Delta_{G_\iota}(x_\iota)$.

Примеры. 1) Мера Лебега на $\mathbf{R}^n$ есть мера Хаара аддитивной группы $\mathbf{R}^n$.

2) Отображение $(r, u) \mapsto ru$ есть изоморфизм произведения $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$ на $\mathbf{C}^*$ (Общ. топ., гл. VIII, § 1, n° 3). Если посредством этого изоморфизма отождествить $\mathbf{C}^*$ с $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$ и обозначить через du меру Хаара на $\mathbf{U}$, то, согласно примеру 2 n° 2, $r^{-1}drdu$ будет мерой Хаара на $\mathbf{C}^*$. С другой стороны, биекция $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ интервала $[0, 1[$ на $\mathbf{U}$, согласно примеру 3 n° 2, преобразует меру Лебега $d\theta$ интервала $[0, 1[$ в меру Хаара на $\mathbf{U}$. Отсюда следует, что при $f \in \mathcal{K}(\mathbf{C}^*)$ интеграл

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 f(re^{2i\pi\theta})\,r^{-1}\,dr\,d\theta$$

определяет меру Хаара на $\mathbf{C}^*$.

6. Мера Хаара проективного предела

Пусть G — локально компактная (и, значит, полная) группа. Пусть, далее, $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ — фильтрующееся по убыванию семейство компактных нормальных делителей группы G, имеющих пересечение $\{e\}$ (так что базис фильтра, который образуют K_α, сходится к e). Положим $G_\alpha = G/K_\alpha$; и пусть $\varphi_\alpha : G \mapsto G_\alpha$ и $\varphi_{\beta\alpha} : G_\alpha \mapsto G_\beta$ $(\alpha \geqslant \beta)$ — канонические гомоморфизмы. Тогда проективный предел проективной системы $(G_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ отождествим с G, а каноническое отображение этого проективного предела в G_α отождествимо с φ_α (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 7, предложение 2). Отображения φ_α и $\varphi_{\beta\alpha}$ — собственные (там же, § 4, следствие 2 предложения 1). Эти условия останутся неизменными на протяжении всего этого n°.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathcal{K}_+(G)$, S — компактное подмножество из G, содержащее* $\operatorname{supp} f$, *U — открытая окрестность множества S в G и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такое $\alpha \in A$ и такая функция*

$g \in \mathscr{K}_+(G)$, равная нулю вне U и постоянная на классах по K_α, что $|f - g| \leqslant \varepsilon$.

b) *Пусть μ и μ' — меры на G, удовлетворяющие равенству $\varphi_\alpha(\mu) = \varphi_\alpha(\mu')$ для любого $\alpha \in A$. Тогда $\mu = \mu'$.*

Существует такое $\alpha_1 \in A$, что $K_{\alpha_1} S \cap K_{\alpha_1}(G - U) = \varnothing$ (Общ. топ., гл. II, 3-е изд., § 4, предложение 4). Следовательно, мы можем, увеличив S и уменьшив U, предположить, что S и U являются объединениями классов по K_{α_1}. Рассмотрим непрерывные числовые функции h на S, обладающие следующим свойством: существует такое $\alpha \geqslant \alpha_1$, что h постоянна на классах по K_α. Эти функции составляют подалгебру алгебры $\mathscr{K}(S)$ (ибо $(\mathscr{K}_\alpha)$ — фильтрующееся по убыванию семейство), которая содержит постоянные и отделяет точки из S: в самом деле, пусть x и y — две различные точки из S; так как пересечением множеств K_α служит $\{e\}$, то найдется такое $\alpha \geqslant \alpha_1$, что $\varphi_\alpha(x) \neq \varphi_\alpha(y)$, и затем такая непрерывная на $\varphi_\alpha(S)$ числовая функция u, что $u(\varphi_\alpha(x)) \neq u(\varphi_\alpha(y))$. Согласно теореме Вейерштрасса — Стоуна, существуют $\alpha \geqslant \alpha_1$ и непрерывная на S функция $h \geqslant 0$, постоянная на классах по K_α и такая, что $|f - h| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ на S. Для каждого $t \in \mathbf{R}$ положим $\delta(t) = \left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right)^+$ и $h' = \delta \circ h$. Тогда функция h' непрерывна на S, $\geqslant 0$, постоянна на классах по K_α и $|h - h'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ на S, а значит, $|f - h'| \leqslant \varepsilon$ на S. С другой стороны, $h'(x) = 0$, если x принадлежит границе множества S в G, ибо тогда $h(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Продолжив h' нулем на дополнение множества S, получим функцию g, удовлетворяющую поставленным условиям, чем и доказано a).

Пусть теперь μ и μ' — такие меры на G, что $\varphi_\alpha(\mu) = \varphi_\alpha(\mu')$ при любом $\alpha \in A$. Пусть, далее, $v \in \mathscr{K}(G)$ есть функция, постоянная на классах по K_α для некоторого $\alpha \in A$, так что можно написать $v = w \circ \varphi_\alpha$, где $w \in \mathscr{K}(G_\alpha)$; тогда $\mu(v) = (\varphi_\alpha(\mu))(w) = (\varphi_\alpha(\mu'))(w) = \mu'(v)$; отсюда заключаем, что, в силу a), $\mu = \mu'$.

Предложение 6. *Пусть μ_α, для каждого $\alpha \in A$,— положительная мера на G_α. Предположим, что $\varphi_{\beta\alpha}(\mu_\alpha) = \mu_\beta$ для $\alpha \geqslant \beta$. Тогда существует, и притом единственная, положительная мера μ на G такая, что $\varphi_\alpha(\mu) = \mu_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.*

Единственность сразу следует из леммы 2b). Докажем существование меры μ. Пусть V — векторное пространство всех функций, принадлежащих $\mathscr{K}(G)$ и постоянных на классах по некоторому K_α. Согласно лемме 2а), V будет положительно изобильным векторным подпространством (гл. III, § 2, n° 5) пространства $\mathscr{K}(G)$. Пусть $f \in V$. Существует такое $\alpha \in A$, что f постоянна на классах по K_α. Путем факторизации, f определяет функцию $f_\alpha \in \mathscr{K}(G_\alpha)$. Число $\mu(f) = \mu_\alpha(f_\alpha)$ не зависит от выбора α, ибо если β — такой индекс, что f постоянна на классах по K_β, и $\gamma \in A$ таково, что $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$, то f определяет такие функции $f_\beta \in \mathscr{K}(G_\beta)$, $f_\gamma \in \mathscr{K}(G_\gamma)$, что $f = f_\beta \circ \varphi_\beta = f_\gamma \circ \varphi_\gamma$; тогда $f_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} = f_\gamma$, значит, $\mu_\gamma(f_\gamma) = (\varphi_{\alpha\gamma}(\mu_\gamma))(f_\alpha) = \mu_\alpha(f_\alpha)$, и точно так же $\mu_\gamma(f_\gamma) = \mu_\beta(f_\beta)$, откуда и следует наше утверждение. Теперь ясно, что μ есть линейная форма на V и что $\mu(f) \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$. Согласно предложению 2 § 2 главы III, μ продолжается до положительной меры на G, которую мы снова обозначим через μ. По самому построению меры μ имеем $\varphi_\alpha(\mu) = \mu_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Определение 5. μ *называется проективным пределом мер* μ_α.

Предложение 7. *В обозначениях предложения* 6, *если каждое* μ_α *есть левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара на* G_α, *то* μ *есть левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара на* G.

Допустим, например, что μ_α — левые меры Хаара, и пусть $s \in G$. Для каждого $x \in G$ имеем

$$(\varphi_\alpha \circ \gamma(s))(x) = \varphi_\alpha(sx) = \varphi_\alpha(s)\varphi_\alpha(x) = (\gamma(\varphi_\alpha(s)) \circ \varphi_\alpha)(x);$$

следовательно, $\varphi_\alpha(\gamma(s)\mu) = \gamma(\varphi_\alpha(s))\mu_\alpha = \mu_\alpha$. Стало быть, в силу леммы 2b), $\gamma(s)\mu = \mu$, так что μ есть левая мера Хаара.

Отныне K_α будут предполагаться не только компактными, но и *открытыми* в G. Тогда G_α дискретны, а группа K_α/K_β, где $\beta \geqslant \alpha$, компактна и дискретна, то есть конечна. Группа G унимодулярна (предложение 3).

Предложение 8. а) *Пусть* μ *и* μ' — *такие две положительные меры на* G, *что для любого* α *и любого класса* C *по* K_α *имеет место равенство* $\mu(C) = \mu'(C)$. *Тогда* $\mu = \mu'$.

b) *Зафиксируем некоторое* $\alpha_0 \in A$. *Пусть* n_α *для любого* $\alpha \geqslant \alpha_0$ *означает число элементов конечной группы* K_{α_0}/K_α. *На* G *существует, и притом единственная, положительная мера* μ *такая, что при любом* $\alpha \in A$ *каждый класс по* K_α *имеет меру* n_α^{-1}. *При этом* μ *есть мера Хаара на* G, *для которой* $\mu(K_{\alpha_0}) = 1$.

Пусть μ и μ' — положительные меры на G, удовлетворяющие условию пункта a). Тогда точки дискретной группы G_α имеют одну и ту же меру относительно $\varphi_\alpha(\mu)$ и $\varphi_\alpha(\mu')$, откуда $\varphi_\alpha(\mu) = \varphi_\alpha(\mu')$. И так как это верно при любом α, то $\mu = \mu'$ (лемма 2b)).

Докажем b). Пусть μ_α для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$ означает такую меру Хаара на дискретной группе G_α, что каждая точка имеет меру n_α^{-1}, и пусть α и β таковы, что $\alpha \geqslant \beta \geqslant \alpha_0$. Тогда K_β/K_α имеет n_α/n_β элементов. Следовательно, $\varphi_{\beta\alpha}(\mu_\alpha)$ есть такая мера на G_β, что каждая точка имеет в качестве меры $n_\alpha^{-1} \cdot \frac{n_\alpha}{n_\beta} = n_\beta^{-1}$; иначе говоря,

$$\varphi_{\beta\alpha}(\mu_\alpha) = \mu_\beta.$$

Теперь достаточно применить предложения 6 и 7.

Пример. Пусть $\mathbf{Q}_p$ есть p-адичное поле, пополнение поля $\mathbf{Q}$ по p-адической норме $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 3, n° 2). Элементы из $\mathbf{Q}_p$ называются *p-адическими числами*. Обозначим по-прежнему через $|x|_p$ непрерывное продолжение p-адической нормы на $\mathbf{Q}_p$. Имеем

$$|x + y|_p \leqslant \sup(|x|_p, |y|_p)$$

для x, y из $\mathbf{Q}$ (там же), и, значит, для x, y из $\mathbf{Q}_p$; кроме того, если $|y|_p < |x|_p$, то $|x + y|_p = |x|_p$, так как

$$|x|_p = |(x + y) - y|_p \leqslant \sup(|x + y|_p, |y|_p).$$

Если (x_n) есть последовательность точек из $\mathbf{Q}_p$, стремящаяся к $x \in \mathbf{Q}_p^*$, то $|x - x_n|_p < |x|_p$ и $|x - x_n|_p < |x_n|_p$ для всех достаточно больших n, и, значит, $|x|_p = |x_n|_p$. Этим доказано, что $|x|_p$ для любого $x \in \mathbf{Q}_p^*$ есть степень p.

Пусть $\mathbf{Z}_p$ есть замыкание $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_p$; это — подкольцо поля $\mathbf{Q}_p$; его элементы называются *целыми p-адическими числами*. Имеем $|x|_p \leqslant 1$ для каждого $x \in \mathbf{Z}_p$. Обратно, пусть x — такой элемент

из $\mathbf{Q}_p$, что $|x|_p \leqslant 1$; покажем, что $x \in \mathbf{Z}_p$; существует последовательность (x_n) элементов из $\mathbf{Q}$, стремящаяся к x, и, в силу вышеизложенного, $|x_n|_p \leqslant 1$ для всех достаточно больших n; достаточно показать, что x_n принадлежит $\mathbf{Z}_p$ для всех достаточно больших n; иными словами, все сводится к случаю, когда $x \in \mathbf{Q}$; тогда $x = a/b$, где b взаимно просто с p; для каждого целого $n > 0$ существуют такие $b'_n \in \mathbf{Z}$ и $h_n \in \mathbf{Z}$, что $bb'_n + h_n p^n = 1$, откуда $x = \frac{aab' + ah_n p^n}{b} = ab'_n + \frac{ah_n p^n}{b}$ и $|x - ab'_n|_p \leqslant p^{-n}$, так что ab'_n стремится к x.

Из этого следует, что замкнутый шар с центром 0 и радиусом p^{-n}, совпадающий с открытым шаром с центром 0 и радиусом p^{-n+1}, есть $p^n\mathbf{Z}_p$. Следовательно, топологическое пространство $\mathbf{Q}_p$ экстремально, а тем самым и вполне несвязно (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 6, n° 4).

Покажем, что целые числа $0, 1, \ldots, p^n - 1$ составляют полную систему вычетов $\mathbf{Z}_p$ по модулю $p^n\mathbf{Z}_p$. Прежде всего, для любых двух таких целых k и k' имеем $|k - k'|_p > p^{-n}$, так что классы этих чисел по модулю $p^n\mathbf{Z}_p$ различны. С другой стороны, пусть $x \in \mathbf{Z}_p$; существует такое $k \in \mathbf{Z}$, что $|x - k|_p \leqslant p^{-n}$; прибавляя к k некоторое кратное p^n, можно предполагать, что $k \in [0, p^n - 1]$, и x сравнимо с k по модулю $p^n\mathbf{Z}_p$, чем наше утверждение доказано. Это показывает, что $\mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p$ канонически изоморфно $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Кроме того, мы видим, что $\mathbf{Z}_p$ предкомпактно, а следовательно, будучи полным, *компактно*. Так как $\mathbf{Z}_p$ есть открытая подгруппа в $\mathbf{Q}_p$, то $\mathbf{Q}_p$ *локально компактно*. Топология в $\mathbf{Q}_p$ имеет счетный базис (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 2, следствие предложения 16). Аддитивная группа $\mathbf{Q}_p$ отождествима с проективным пределом дискретных групп $\mathbf{Q}_p/p^n\mathbf{Z}_p$.

На аддитивной группе $\mathbf{Q}_p$ существует, и притом единственная мера Хаара α такая, что $\alpha(\mathbf{Z}_p) = 1$; она называется *нормированной мерой Хаара* на $\mathbf{Q}_p$. Так как $\mathbf{Z}_p$ есть объединение p^n непересекающихся классов по $p^n\mathbf{Z}_p$ (n — целое $\geqslant 0$), то $\alpha(p^n\mathbf{Z}_p) = p^{-n}$; точно так же $\alpha(p^{-n}\mathbf{Z}_p) = p^n$, так что окончательно $\alpha(p^n\mathbf{Z}_p) = p^{-n}$ при любом $n \in \mathbf{Z}$. Согласно предложению 8b), α *есть единственная положительная мера на* $\mathbf{Q}_p$, *обладающая тем свойством, что всякий класс по* $p^n\mathbf{Z}_p$ *(n — целое $\geqslant 0$) имеет меру* p^{-n}.

Очевидно, сужение α на $\mathbf{Z}_p$ есть мера Хаара на $\mathbf{Z}_p$.

7. *Локальное определение меры Хаара*

Предложение 9. *Пусть G — локально компактная группа, V — ее открытое подмножество и μ — ненулевая положительная мера на V, обладающая следующим свойством: если U — открытое подмножество из V и $s \in G$ таково, что $sU \subset V$, то образом меры μ_U, индуцированной мерой μ на U, при гомеоморфизме $x \mapsto sx$ множества U на sU служит μ_{sU}. Тогда на G существует, и притом единственная, левая мера Хаара α, индуцирующая μ на V.*

Пусть μ_s для любого $s \in G$ означает образ меры μ при гомеоморфизме $x \mapsto sx$ множества V на sV. Сужение μ_s на $V \cap sV$ есть образ меры $\mu_{s^{-1}V \cap V}$ при сужении отображения $x \mapsto sx$ на $s^{-1}V \cap V$; по условию, этот образ есть $\mu_{V \cap sV}$. Применяя перенос, видим, что μ_s и μ_t имеют одно и то же сужение на $sV \cap tV$ при любых s и t. Следовательно, в силу предложения 1 § 3 главы III, существует мера α на G, индуцирующая μ_s на sV при любом s. Ясно, что α есть единственная левая мера Хаара на G, индуцирующая μ на V.

Следствие. *Пусть G и G' — локально компактные группы, V* (соотв. V') *— открытая окрестность нейтрального элемента группы G* (соотв. G') *и φ — такой локальный изоморфизм группы G' в G* (Общ. топ., гл. III, § 1, определение 2), *определенный на V', что $\varphi(V') = V$. Пусть, далее, α' есть левая мера Хаара на G' и $\alpha'_{V'}$ — ее сужение на V'. Тогда $\varphi(\alpha'_{V'})$ есть сужение на V однозначно определенной левой меры Хаара α на G.*

Пусть V_1 — такая открытая окрестность элемента e в G, что $V_1V_1^{-1} \subset V$. Пусть, далее, μ есть сужение $\varphi(\alpha'_{V'})$ на V_1. И пусть открытое подмножество U из V_1 и $s \in G$ таковы, что $sU \subset V_1$. Имеем $s \in V_1V_1^{-1} \subset V$, и, значит, $s = \varphi(s')$ с некоторым $s' \in V'$. Пусть $x \in U$. Тогда $x = \varphi(x')$ с некоторым $x \in V$, и, стало быть, $sx = \varphi(s')\varphi(x') = \varphi(s'x')$, поскольку $sx \in sU \subset V$. Так как левые переносы в G' сохраняют α', то мы видим, что V_1 и μ удовлетворяют условиям предложения 9. Пусть α есть левая мера Хаара на G, индуцирующая μ на V_1. Для каждого $t \in V$ существует такая открытая окрестность W элемента e в V_1, что $tW \subset V$. Тогда сужение $\varphi(\alpha'_{V'})$ на tW получается переносом из сужения μ на W,

а значит, из сужения α на tW. Следовательно, $\varphi(\alpha'_{V'})$ есть сужение α на V.

Говорят, что α *получается из* α' *при помощи локального изоморфизма* φ.

Пример. Мера Хаара на $\mathbf{T}$, полученная в примере 3 n° 2, может быть получена из меры Лебега на $\mathbf{R}$ при помощи локального изоморфизма $\mathbf{R}$ в $\mathbf{T}$.

8. Относительно инвариантные меры

Предложение 10. *Пусть G — локально компактная группа и μ — относительно левоинвариантная мера с мультипликатором χ на G. Если χ_1 — непрерывное представление группы G в $\mathbf{C}^*$, то мера $\chi_1\cdot\mu$ относительно левоинвариантна и имеет мультипликатор $\chi_1\chi$.*

В самом деле,

$$\gamma(s)(\gamma_1\cdot\mu) = (\gamma(s)\chi_1)\cdot(\gamma(s)\mu) = (\chi_1(s^{-1})\chi_1)\cdot(\chi(s)^{-1}\mu) = (\chi_1\chi)(s)^{-1}(\chi_1\cdot\mu).$$

Следствие 1. *Пусть μ — левая мера Хаара на G. Для того чтобы ненулевая мера ν на G была относительно левоинвариантной, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $a\chi\cdot\mu$, где $a\in\mathbf{C}^*$ а χ есть непрерывное представление группы G в $\mathbf{C}^*$; тогда ее мультипликатор есть χ.*

Условие достаточно (предложение 10). С другой стороны, если ν есть ненулевая относительно левоинвариантная мера с мультипликатором χ, то $\chi^{-1}\cdot\nu$ левоинвариантна (предложение 10) и, следовательно, имеет вид $a\mu$, где $a\in\mathbf{C}^*$ (следствие теоремы 1).

Следствие 2. *Всякая относительно левоинвариантная мера относительно правоинвариантна.*

В самом деле, в обозначениях следствия 1,

$$\delta(s)(\chi\cdot\mu) = (\delta(s)\chi)\cdot(\delta(s)\mu) = (\chi(s)\chi)\cdot(\Delta_G(s)\mu) = \\ = (\chi\Delta_G)(s)(\chi\cdot\mu). \tag{34}$$

Начиная с этого момента, мы будем, на основании следствия 2, говорить просто об *относительно инвариантных мерах на G*. Частными случаями относительно инвариантных мер служат

левые и правые меры Хаара. У заданной относительно инвариантной меры ν на G следует различать ее *левый мультипликатор* χ *и правый мультипликатор* χ', определяемые равенствами $\gamma(s)\nu = \chi(s)^{-1}\nu$, $\delta(s)\nu = \chi'(s)\nu$. В силу (34), эти мультипликаторы связаны соотношением

$$\chi' = \chi\Delta_G. \tag{35}$$

Обозначая всюду через μ левую меру Хаара, имеем

$$\check{\nu} = (\chi\cdot\mu)^{\vee} = \check{\chi}\cdot\check{\mu} = (\chi^{-1}\Delta_G^{-1})\cdot\mu,$$

так что $\check{\nu}$ — относительно инвариантная мера с левым мультипликатором $\chi^{-1}\Delta_G^{-1}$ и правым мультипликатором χ^{-1}.

Пренебрежимые, локально пренебрежимые, измеримые и локально интегрируемые функции будут одни и те же по отношению к любой относительно инвариантной мере.

9. *Квазиинвариантные меры*

Предложение 11. *Пусть G — локально компактная группа и μ — левая мера Хаара на G. Для того чтобы мера $\nu \neq 0$ на G была левоквазиинвариантна, необходимо и достаточно, чтобы она была эквивалентна μ.*

Достаточность очевидна. Покажем, что левоквазиинвариантная мера $\nu \neq 0$ эквивалентна μ. Можно ограничиться случаем $\nu > 0$. Пусть A — компактное подмножество из G. Справедливость утверждения будет установлена, если мы докажем, что условия $\mu(A) = 0$ и $\nu(A) = 0$ эквивалентны (гл. V, § 5, n° 5, замечание).

a) Для каждого $f \in \mathcal{K}_+(G)$ функция $(x, y) \mapsto f(x)\varphi_A(xy)$ на $G\times G$ $(\nu \otimes \mu)$-интегрируема, так как она полунепрерывна сверху, ограничена и ее носитель содержится в компактном множестве $K \times K^{-1}A$, где $K = \operatorname{supp} f$. Следовательно, по теореме Лебега — Фубини,

$$\int d\nu(y) \int \varphi_A(xy) f(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\mu(x) \int \varphi_A(xy)\, d\nu(y). \tag{36}$$

b) Пусть $\nu(A) = 0$. По условию, $\nu(xA) = 0$ для любого $x \in G$ и, значит, правая часть формулы (36) равна нулю. Поэтому существует такое ν-пренебрежимое множество N_f, что для любого

$y \notin N_f$ имеем

$$0 = \int \varphi_A(xy) f(x)\, d\mu(x) = \Delta_G(y)^{-1} \int \varphi_A(x) f(xy^{-1})\, d\mu(x). \quad (37)$$

Пусть B — компактное подмножество из G, для которого $\nu(B) \neq 0$, и пусть в качестве f берется функция из $\mathscr{K}_+(G)$, равная 1 на AB^{-1}. Тогда существует $y \in B$, для которого выполнено (37). Но поскольку

$$\varphi_A(x) f(xy^{-1}) = \varphi_A(x)$$

для всех $y \in B$, то тем самым доказано, что $\mu(A) = 0$.

c) Пусть $\mu(A) = 0$. Тогда для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(G)$ левая часть формулы (36) равна нулю, а значит, правая тоже равна нулю. Следовательно, существует такое локально μ-пренебрежимое множество M, что

$$\int \varphi_A(xy)\, d\nu(y) = 0$$

для всех $x \notin M$. Поскольку $\mu \neq 0$, заключаем отсюда, что $\nu(xA) = 0$ для некоторых $x \in G$, откуда $\nu(A) = 0$.

Применяя предложение 11 к G°, видим, что правоквазиинвариантные меры тождественны левоквазиинвариантным. Те и другие называются просто *квазиинвариантными мерами на G*.

10. *Локально компактные тела*

Определение 6. *Пусть K — локально компактное тело. Модулем элемента $a \in K^*$ называется и обозначается* $\mathrm{mod}_K(a)$ *или просто* $\mathrm{mod}(a)$ *модуль автоморфизма $x \longmapsto ax$ аддитивной группы K^+ тела K; по условию* $\mathrm{mod}(0) = 0$.

Примеры. 1) Пусть $K = \mathbf{R}$. Если $s > 0$, то $s[0, 1] = [0, s]$; если $s < 0$, то $s[0, 1] = [s, 0]$. Следовательно, $\mathrm{mod}_{\mathbf{R}}(t) = |t|$ для любого $t \in \mathbf{R}$.

2) Пусть $K = \mathbf{Q}_p$. Если $s \in \mathbf{Q}_p^*$ таково, что $|s|_p = p^{-n}$, то $s\mathbf{Z}_p$ есть множество тех $x \in \mathbf{Q}_p$, для которых $|x_p| \leqslant p^{-n}$; значит, обозначая через μ нормированную меру Хаара на $\mathbf{Q}_p$, имеем

$$\mu(s\mathbf{Z}_p) = p^{-n}.$$

Поэтому $\mathrm{mod}_{\mathbf{Q}_p}(t) = |t|_p$ для любого $t \in \mathbf{Q}_p$.

Предложение 12. *Функция* mod *непрерывна на* K *и* $\mathrm{mod}(ab) = \mathrm{mod}(a)\mathrm{mod}(b)$, *каковы бы ни были* a *и* b *из* K.

Последнее соотношение очевидно. Предложение 4 показывает, что функция mod непрерывна в каждой точке из K^*. Остается лишь доказать ее непрерывность в 0. Для дискретного K это очевидно; допустим поэтому, что K не дискретно. Пусть α — мера Хаара на K^+ и C — компактное подмножество из K, для которого $\alpha(C) > 0$; если $a \in K^*$, то $\alpha(aC) = \mathrm{mod}(a)\alpha(C)$. Так как K не дискретно, то $\alpha(\{0\}) = 0$ (предложение 2); значит, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая открытая окрестность нуля U, что $\alpha(U) \leqslant \varepsilon$. Так как произведение в K непрерывно, то $aC \subset U$ для всех a, достаточно близких к 0, и тогда $\mathrm{mod}(a) \leqslant \varepsilon/\alpha(C)$.

Предложение 13. *Пусть* V_M *для любого* $M > 0$ *означает множество тех* $x \in K$, *для которых* $\mathrm{mod}(x) \leqslant M$. *Если* K *не дискретно, то множества* V_M *образуют фундаментальную систему компактных окрестностей нуля в* K.

Согласно предложению 12, множества V_M являются замкнутыми окрестностями нуля. Покажем, что они компактны. Пусть U — компактная окрестность нуля. В K существует такое $r \neq 0$, что $\mathrm{mod}(r) < 1$ и $r^n \in U$ для всех $n > 0$; в самом деле, пусть W — такая окрестность нуля, что $WU \subset U$; в силу предложения 12, в K существует такое $r \neq 0$, что $\mathrm{mod}(r) < 1$ и $r \in U \cap W$; тогда $r^2 \in WU \subset U$ и индукцией по n получаем, что $r^n \in U$ для всех $n > 0$. Покажем, что V_M содержится в объединении конечного числа множеств $r^{-q}U$ (q — целое $\geqslant 0$), чем и будет доказано, что V_M компактны. Если x — предельная точка последовательности (r^n), то $\mathrm{mod}(x)$ есть предельная точка последовательности $(\mathrm{mod}(r)^n)$, и, значит, $\mathrm{mod}(x) = 0$, $x = 0$; поскольку U компактно, заключаем (Общ. топ., гл. I, 3-е изд., § 9, следствие теоремы 7), что $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. Возьмем тогда $a \in V_M$. Так как последовательность $(r^n a)_{n\geqslant 0}$ стремится к нулю, то существует наименьшее $n \geqslant 0$ такое, что $r^n a \in U$. Если $n > 0$, то $r^{n-1}a \notin U$ и, значит, $r^n a \in U \cap \complement(rU)$; замыкание X множества $U \cap \complement(rU)$ компактно, поскольку компактно U, и не содержит 0, поскольку rU есть окрестность нуля; следовательно, на X, $\mathrm{mod}\, x$ минорируется некоторым числом $m > 0$. Стало быть, если $n > 0$, то

$m \leqslant \operatorname{mod}(r^n a)$, откуда $\operatorname{mod}(r^{-1})^n \leqslant M/m$. Но так как $\operatorname{mod}(r^{-1}) > 1$, то целое n может принимать лишь не зависящее от a конечное число значений, что и завершает доказательство компактности.

Наконец, так как пересечение компактных окрестностей нуля V_M сводится к $\{0\}$, то они образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (Общ. топ., гл. I, 3-изд., § 9, предложение 1).

Следствие. *Топология недискретного локального компактного тела обладает счетным базисом.*

Действительно, K есть объединение компактных множеств V_1, V_2, ... С другой стороны, K метризуемо (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 3, предложение 1). Следовательно, топология в K имеет счетный базис (там же, § 2, следствие предложения 16).

Предложение 14. *Пусть α — мера Хаара на K^+. Тогда $\beta = (\operatorname{mod}_K)^{-1}\alpha$ есть левая мера Хаара на мультипликативной группе K^*.*

Действительно, при $b \in K^*$ отображение $a \mapsto b^{-1}a$ тела K в K переводит α в $(\operatorname{mod}_K b)\alpha$, и, значит, $(\operatorname{mod}_K)^{-1}\alpha$ в себя, откуда и следует предложение.

Следствие. *Пусть f — функция, определенная на K^* и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в некотором банаховом пространстве. Для того чтобы f была β-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы была α-интегрируема функция $(\operatorname{mod}_K)^{-1}f$, и тогда*

$$\int_{K^*} f(x)\, d\beta(x) = \int_{K^+} (\operatorname{mod}_K(x))^{-1} f(x)\, d\alpha(x).$$

Это вытекает из предложения 14, следствия предложения 13 и теоремы 1 § 5 главы V.

Предложение 15. *Предположим, что K коммутативно. Пусть u — автоморфизм векторного пространства $E = K^n$.* Тогда

$$\operatorname{mod}_E u = \operatorname{mod}_K(\det u).$$

Достаточно установить справедливость формулы, когда u пробегает какую-либо систему образующих группы $\mathrm{GL}(E)$. Но $\mathrm{GL}(E)$ порождается следующими элементами (Алг., гл. II, 3-е изд., § 10, следствие 2 предложения 14):

(a) элементами u_1 вида

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

где $\sigma \in \mathfrak{S}_n$;

(b) элементами u_2 вида

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (ax_1, x_2, \ldots, x_n)$$

с $a \in K^*$;

(c) элементами u_3 вида

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Взяв $f \in \mathscr{K}(E)$ и обозначив через α меру Хаара на K^+, получаем

$$\int_{K^n} \ldots \int f\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i, x_2, \ldots, x_n\right) d\alpha(x_1)\, d\alpha(x_2) \ldots d\alpha(x_n) =$$

$$= \int_{K^{n-1}} \ldots \int d\alpha(x_2) \ldots d\alpha(x_n) \int_K f\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i, x_2, \ldots, x_n\right) d\alpha(x_1) =$$

$$= \int_{K^{n-1}} \ldots \int d\alpha(x_2) \ldots d\alpha(x_n) \int_K f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\alpha(x_1) =$$

$$= \int_{K^n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, d\alpha(x_1) \ldots d\alpha(x_n);$$

а с другой стороны, $\mathrm{mod}_K(\det u_3) = \mathrm{mod}_K(1) = 1$, откуда получаем требуемый результат для u_3. Аналогичным путем устанавливаем его для u_1 и u_2.

Пусть K — локально компактное поле и E — векторное пространство конечной размерности n над K. Изоморфизм φ векторного пространства K^n на векторное пространство E преобразует топологию пространства K^n в топологию пространства E, которая превращает E в локально компактное векторное пространство. Эта топология (называемая *канонической*) не зависит от φ, поскольку всякий автоморфизм векторного пространства K^n взаимно непрерывен. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, говоря о E как о топологическом векторном пространстве, мы всегда будем иметь в виду только что определенную топологию. Всякий автоморфизм u векторного пространства E взаимно непрерывен,

так что $\mathrm{mod}_E u$ определен. Если же u — необратимый эндоморфизм пространства E, то будем считать $\mathrm{mod}_E u = 0$. Тогда:

Следствие 1. *Пусть K — локально компактное поле и E — конечномерное векторное пространство над K. Для каждого эндоморфизма u векторного пространства E имеем*

$$\mathrm{mod}_E(u) = \mathrm{mod}_K(\det u).$$

Для обратимого u это вытекает из предложения 15. Если же u необратим, то $\det u = 0$, и, значит, $\mathrm{mod}_K(\det u) = 0 = \mathrm{mod}_E u$.

Следствие 2. *Пусть E — n-мерное действительное векторное пространство, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — его базис, P — множество тех $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E$, у которых $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$ для каждого i, и μ — единственная мера Хаара на аддитивной группе E, такая, что $\mu(P) = 1$. Пусть, далее, $x_1, \ldots, x_n$ — точки из E и S — замкнутая выпуклая оболочка в E множества $\{0, x_1, \ldots, x_n\}$. Если $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, то*

$$\mu(S) = \mu(\overset{\circ}{S}) = \frac{1}{n!}\,|\det(\alpha_{ij})|.$$

Отождествим E с $\mathbf{R}^n$ при помощи изоморфизма, переводящего (e_i) в канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда μ совпадает с мерой Лебега μ_n на $\mathbf{R}^n$.

Допустим сначала, что $x_i = e_i$ при любом i. Тогда S будет множеством S_n тех $x = (\xi_i) \in \mathbf{R}^n$, у которых $\xi_i \geqslant 0$ для всех i и $\xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant 1$. Положим $\mu_n(S_n) = a_n$, и пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Отождествляя $\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, можно рассмотреть срез C_λ множества S_n по λ. Этот срез будет пустым, если $\lambda < 0$ или $\lambda > 1$; если же $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то C_λ есть множество тех $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$, для которых $\xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_n \geqslant 0$, $\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} \leqslant 1 - \lambda$, и, значит, получается из S_{n-1} при помощи гомотетии с коэффициентом $1 - \lambda$, так что $\mu_{n-1}(C_\lambda) = (1-\lambda)^{n-1} a_{n-1}$. По теореме Лебега — Фубини,

$$a_n \int_0^1 (1-\lambda)^{n-1} a_{n-1}\, d\lambda = \frac{1}{n} a_{n-1}.$$

Так как $a_1 = 1$, то заключаем, что $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

Вернемся теперь к общему случаю следствия. Пусть u — такой эндоморфизм пространства $\mathbf{R}^n$, что $u(e_i) = x_i$ для каждого i. Имеем $u(S_n) = S$. Если u обратим, то предложение 15 показывает, что

$$\mu_n(S) = \frac{1}{n!}|\det u| = \frac{1}{n!}|\det(\alpha_{ij})|.$$

Так как $S - \mathring{S}$ содержится в конечном числе гиперплоскостей, то $\mu(\mathring{S}) = \mu(S)$. Наконец, если u необратим, то S содержится в некоторой гиперплоскости, так что $\mu(S) = 0 = \det(\alpha_{ij})$.

11. *Конечномерные алгебры над локально компактным телом*

Пусть K — поле и A есть K-алгебра конечного ранга с единичным элементом. Пусть, далее, L_a, R_a для любого $a \in A$ означают эндоморфизмы $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto xa$ векторного пространства A и $N_{A/K}(a) \in K$, $N_{A^\circ/K}(a) \in K$ — нормы элемента a в регулярных представлениях алгебры A и противоположной алгебры A°; напомним, что $N_{A/K}(a) = \det(L_a)$, $N_{A^\circ/K}(a) = \det(R_a)$. Следующие условия равносильны: a обратимо, L_a обратим в $\mathrm{Hom}_K(A, A)$, R_a обратим в $\mathrm{Hom}_K(A, A)$, $N_{A/K}(a) \neq 0$, $N_{A^\circ/K}(a) \neq 0$. Обозначим через A^* множество всех обратимых элементов из A.

Предположим теперь, что K локально компактно, и, следовательно, алгебра A локально компактна. Тогда $N_{A/K}$ и $N_{A^\circ/K}$ — непрерывные отображения A в K, и, значит, A^* *открыто* в A. В силу следствия 1 предложения 15, имеем

$$\mathrm{mod}_A L_a = \mathrm{mod}_K N_{A/K}(a), \qquad \mathrm{mod}_A R_a = \mathrm{mod}_K N_{A^\circ/K}(a). \tag{38}$$

Предложение 16. *Пусть α — мера Хаара аддитивной группы алгебры A. Меры*

$$(\mathrm{mod}_K N_{A/K}(a))^{-1}\,d\alpha(a), \qquad (\mathrm{mod}_K N_{A^\circ/K}(a))^{-1}\,d\alpha(a)$$

на A^* являются соответственно левой и правой мерой Хаара мультипликативной группы A^*.

В самом деле, пусть α' — сужение меры α на открытое множество A^*. Для $a \in A^*$ имеем $L_a(\alpha') = (\mathrm{mod}_K N_{A/K}(a))^{-1}\alpha'$, и, значит,

$$(\mathrm{mod}_K N_{A/K}(a))^{-1}\,d\alpha'(a)$$

есть левая мера Хаара на A^* (следствие 1 предложения 10). Переходя к противоположной алгебре, видим, что

$$(\mathrm{mod}_K N_{A^\circ/K}(a))^{-1}\, d\alpha'(a)$$

есть правая мера Хаара на A^*.

Предложение 17. *Предположим, что A есть (локально компактное) тело. Для любого $a \in A$ имеем* $\mathrm{mod}_A(a) = \mathrm{mod}_K N_{A/K}(a)$.

Это — видоизменение первой из формул (38).

Примеры. 1) Возьмем $K = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{C}$. Учитывая предложение 4 из Алг., гл. VIII, § 12, получаем, что $\mathrm{mod}_{\mathbf{C}}(z) = |z|^2$ для каждого $z \in \mathbf{C}$.

2) Возьмем $K = \mathbf{R}$, а в качестве A — *тело кватернионов* $\mathbf{H}$ (Общ. топ., гл. VIII, 3-е изд., § 1, n° 4). Рассмотрим следующие элементы из $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

которые вместе с I_2 образуют базис $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ над $\mathbf{C}$. Легко убедиться, что

$$X_1^2 = X_2^2 = X_3^2 = -I_2, \qquad X_1X_2 = -X_2X_1 = X_3,$$
$$X_2X_3 = -X_3X_2 = X_1, \qquad X_3X_1 = -X_1X_3 = X_2.$$

Следовательно, отображение $a + bi + cj + dk \mapsto aI_2 + bX_1 + cX_2 + dX_3$ продолжается до $\mathbf{C}$-изоморфизма алгебры $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H}$ на алгебру $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$. Так как $[\mathbf{H} : \mathbf{R}] = 4$, то $\mathbf{C}$ есть нейтрализатор тела $\mathbf{H}$ и приведенная норма элемента $q = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$ есть

$$\mathrm{Nrd}(q) = \det(aI_2 + bX_1 + cX_2 + dX_3) =$$
$$= \det\begin{pmatrix} a+id & -c+ib \\ c+ib & a-id \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \|q\|^2.$$

Согласно предложению 8 из Алг., гл. VIII, § 12, имеем

$$N_{\mathbf{H}/\mathbf{R}}(q) = (\mathrm{Nrd}_{\mathbf{H}/\mathbf{R}}(q))^2 = \|q\|^4.$$

А теперь предложение 17 показывает, что

$$\mathrm{mod}_{\mathbf{H}}(q) = \|q\|^4.$$

Более глубокое изучение строения локально компактных тел будет проведено в Коммутативной алгебре, гл. VI, § 9.

Упражнения

1) Пусть G — компактная группа. Показать, что всякое непрерывное представление φ группы G в $\mathbf{R}_+^*$ таково, что $\varphi(G) = \{1\}$. Вывести отсюда, что относительно инвариантная положительная мера на G инвариантна.

2) Пусть G — топологическая группа, коммутант которой всюду плотен в ней. Показать, что всякое непрерывное представление φ группы G в отделимую коммутативную группу таково, что $\varphi(G) = \{e\}$. Вывести отсюда, что если G локально компактна, то всякая относительно инвариантная комплексная мера на G инвариантна. В частности, G унимодулярна.

3) Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G и $\nu = \Delta_G^{-1/2}\mu$. Показать, что

$$\gamma(s)\nu = \Delta_G(s)^{1/2}\nu, \qquad \delta(s)\nu = \Delta_G(s)^{1/2}\nu, \qquad \check{\nu} = \nu.$$

4) Пусть G и G' — локально компактные группы, V (соотв. V') — открытая окрестность нейтрального элемента в G (соотв. G') и φ — локальный изоморфизм G' в G, определенный на V' и такой, что $\varphi(V') = V$. Показать, что $\Delta_G \circ \varphi$ есть сужение $\Delta_{G'}$ на V'.

5) Пусть для любого a, принадлежащего мультипликативной группе $\mathbf{Q}^*$, $\varphi(a)$ есть автоморфизм аддитивной группы $\mathbf{R}$, определенный формулой $\varphi(a)x = ax$. Наделим $\mathbf{Q}^*$ дискретной топологией. Пусть G — топологическое полупрямое произведение $\mathbf{Q}^*$ и $\mathbf{R}$, определяемое отображением φ (Общ. топ., гл. III, 3-е изд. § 2, n° 10). Показать, что G локально изоморфна $\mathbf{R}$, но не унимодулярна.

6) Пусть G — локально компактная группа, обладающая открытой компактной подгруппой H. Показать, что $\operatorname{mod}\varphi \in \mathbf{Q}_+^*$ для любого автоморфизма φ группы G. [Заметить, что $\varphi(H) \cap H$ имеет конечный индекс в H и $\varphi(H)$.] Показать, что равенство $\Delta_G(s) = 1$ определяет открытую подгруппу группы G, содержащую H.

7) Пусть G — локально компактная группа, β — левая мера Хаара на G, A — подмножество из G и B — такое относительно компактное β-интегрируемое подмножество из G, что $\beta(B) > 0$. Показать, что если компактные подмножества из AB имеют ограниченные меры относительно β, то A относительно компактно. [Взять за образец рассуждение предложения 1.]

8) Пусть G — локально компактная группа, A — всюду плотное множество в G, α — левая мера Хаара на G и H — α-измеримое подмножество из G, обладающее следующим свойством: для любого $s \in A$ множества $sH \cap (\complement H)$ и $H \cap (\complement sH)$ локально α-пренебрежимы. Показать, что H локально α-пренебрежимо или имеет локально α-пренебрежимое дополнение. [Показать, что $\varphi_H \cdot \alpha$ левоинвариантна.]

9) В обозначениях доказательства теоремы 1, пусть β — единственная левая мера Хаара на G, для которой $\beta(f_0) = 1$. Показать,

что $I_g(f)$ стремится к $\beta(f)$ по $\mathfrak{B}$ для любого $f \in \mathscr{K}(G)$. [Пусть a есть предельная точка для $g \longmapsto I_g(f)$ по $\mathfrak{B}$. Существует такой ультрафильтр $\mathfrak{A}$, мажорирующий $\mathfrak{B}$, что $I_g(f)$ стремится к a по $\mathfrak{A}$. С другой стороны, $I_g(f)$ стремится к $\beta(f)$ по $\mathfrak{A}$.]

10) Пусть G — локально компактная группа и μ — левая мера Хаара на G. Показать, что всякое μ-интегрируемое множество A содержится в счетном объединении компактных множеств. [Свести к случаю, когда A открыто, и заметить, что существует открытая подгруппа группы G, являющаяся счетным объединением компактных подмножеств.]

*11) Пусть G — недискретная локально компактная группа, счетная в бесконечности, и β — левая мера Хаара группы G. Показать, что всякая компактная окрестность V элемента e содержит нормальный делитель H группы G, β-пренебрежимый и такой, что G/H есть польская локально компактная группа. [Возможный способ рассуждения: пусть L — открытая подгруппа группы G, порожденная множеством V; и пусть $b_1, b_2, \ldots$ — представители левых классов по L. Образовать убывающую последовательность (V_n) таких симметричных окрестностей элемента e, что: 1) $V_n^2 \subset V_{n-1}$, 2) $xV_nx^{-1} \subset V_{n-1}$ для всех $x \in V$, 3) $b_i V_n b_i^{-1} \subset V_{n-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 4) $\beta(V_n) \leqslant 1/n$. Положить $H = V_1 \cap V_2 \cap \ldots$.]

Пусть (f_n) — последовательность числовых функций на G, равномерно непрерывных относительно левой равномерной структуры. Показать, что H можно построить так, чтобы, кроме того, f_n были постоянны на классах по H. [Выбрать V_n в предыдущем построении так, чтобы $|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant 1/n$ при $x^{-1}y \in V_n$ и $1 \leqslant i \leqslant n$.]

Пусть (g_n) — последовательность β-интегрируемых числовых функций на G. Показать, что H можно построить так, чтобы g_n были почти всюду постоянны на классах по H.

12) Пусть K — недискретное локально компактное тело и E — левое топологическое векторное пространство над K.

a) Если E одномерно, то E изоморфно K_s. [Взять за образец доказательство предложения 2 из Топ. вект. простр., гл. I, § 2, заменив абсолютное значение функцией mod_K.]

b) Если E n-мерно, то E изоморфно K_s^n. [Взять за образец доказательство теоремы 2 из Топ. вект. простр., гл. I, § 2.]

c) Предположим, что E локально компактно. Пусть F — его подпространство конечной размерности n. Пусть $\operatorname{mod}_E(a)$ для любого $a \in K$ означает модуль отображения $x \longmapsto ax$ пространства E в себя. Так как F, согласно b), замкнуто в E, то можно образовать $\operatorname{mod}_{E/F}(a)$. Показать, что $\operatorname{mod}_E(a) = \operatorname{mod}_K(a)^n \operatorname{mod}_{E/F}(a)$. Показать, что если $\operatorname{mod}_K(a) < 1$ и $F \neq E$, то $\operatorname{mod}_{E/F}(a) < 1$. [$a^n \to 0$ при $n \to +\infty$; рассуждая как при доказательстве предложения 12, вывести отсюда, что $\operatorname{mod}_{E/F}(a^n) \to 0$.] Вывести отсюда, что $n \leqslant \log \operatorname{mod}_E(1/a)/\log \operatorname{mod}_K(1/a)$, и, значит, E конечномерно.

[В Коммутативной алгебре, гл. VI, будет показано, что топология локально компактного тела может быть определена посредством некоторой нормы. Тогда последний результат пункта с) будет частным случаем теоремы 3 из Топ. вект. простр., гл. I, § 2.]

*13) Пусть G — локально компактная группа, действующая непрерывно слева в польском локально компактном пространстве T, β — левая мера Хаара на G и ν — положительная мера на T, квазиинвариантная относительно G.

a) Существует функция $(s, x) \longmapsto \chi(s, x) > 0$ на $G \times T$, локально $(\beta \otimes \nu)$-интегрируемая и такая, что для любого $s \in G$ функция $x \longmapsto \chi(s^{-1}, x)$ локально ν-интегрируема и удовлетворяет соотношению $\gamma(s)\nu = \chi(s^{-1}, \cdot)\nu$. [Показать, используя замечание в n° 5 § 5 главы V, что $(s, x) \longmapsto (s, sx)$ преобразует $\beta \otimes \nu$ в эквивалентную меру; пусть $\chi(s^{-1}, x)d\beta(s)d\nu(x)$ — эта эквивалентная мера. Для всех $\varphi \in \mathscr{K}(G)$ и $\psi \in \mathscr{K}(T)$ имеем

$$\int \varphi(s)\, d\beta(s) \int \psi(sx)\, d\nu(x) = \int \varphi(s)\, d\beta(s) \int \psi(x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\nu(x),$$

откуда $\int \psi(sx)\, d\nu(x) = \int \psi(x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\nu(x)$ всюду, кроме локально β-пренебрежимого множества $N(\psi)$. Тогда применить лемму 1 § 3 главы VI, затем изменить χ на $(\beta \otimes \nu)$-пренебрежимом множестве.]

b) Показать, что для любых s и t из G

$$\chi(st, x) = \chi(s, tx)\, \chi(t, x)$$

всюду, за исключением некоторого ν-пренебрежимого множества значений x [воспользоваться соотношением $\gamma(st)\nu = \gamma(s)(\gamma(t)\nu)$].

c) Показать, что функция χ из а) определена всюду на $G \times T$, кроме некоторого локально $(\beta \otimes \nu)$-пренебрежимого множества.

*14) Пусть T — локально компактное пространство и $\mathscr{U}$ — равномерная структура на T, для которой существует такое окружение V_0, что $V_0(t)$ компактно при любом $t \in T$ (Общ. топ., гл. II, 3-е изд., § 4, упражнение 9). Пусть, с другой стороны, Γ есть такая равномерно равностепенно непрерывная группа гомеоморфизмов пространства T (относительно равномерной структуры $\mathscr{U}$), что существует $a \in T$, орбита которого относительно Γ всюду плотна. Показать, что на T существует ненулевая положительная мера, инвариантная относительно Γ, и что эта мера единственна с точностью до постоянного множителя. Возможный способ действий:

1°. В том, что касается существования инвариантной меры, следовать методу доказательства теоремы 1; прежде всего доказать, что если K — компактное подмножество из T и U — открытая окрестность точки a, то существует конечное число таких элементов $\sigma_i \in \Gamma$, что $K \subset \bigcup_i \sigma_i(U)$.

2°. В том, что касается единственности, прежде всего заметить, что окружения из $\mathcal{U}$, инвариантные относительно всех гомеоморфизмов $\sigma \times \sigma$ пространства $T \times T$, где $\sigma \in \Gamma$, образуют фундаментальную систему окружений $\mathfrak{S}$. Пусть для любого относительно компактного множества $A \subset T$ и любого относительно компактного множества $B \subset T$, содержащего внутренние точки, $(A : B)$ есть наименьшее число элементов покрытия множества A, составленного из множеств вида σB, где $\sigma \in \Gamma$; если $C \subset T$ есть третье относительно компактное множество, содержащее внутренние точки, то $(A : C) \leqslant (A : B)(B : C)$. Пусть K — компактное подмножество из T, $L \supset K$ — относительно компактное открытое множество, $V \in \mathfrak{S}$ — симметричное открытое окружение, содержащееся в V_0 и такое, что $V(K) \subset L$, и $W \in \mathfrak{S}$ — симметричное замкнутое окружение, содержащееся в V. Для любого симметричного окружения $U \in \mathfrak{S}$, такого, что $UW \subset V$ и $WU \subset V$, показать, что для всякой положительной меры ν на T, инвариантной относительно Γ,

$$(W(a) : U(a))\,\nu(K) \leqslant (L : U(a))\,\nu(V(a)), \tag{1}$$

$$(K : U(a))\,\nu(W(a)) \leqslant (V(a) : U(a))\,\nu(L). \tag{2}$$

Для этого доказать, что если $(\sigma_i(U(a)))$ — покрытие множества L, составленное из $(L : U(a))$ множеств, то каждое $x \in K$ принадлежит по крайней мере $(W(a) : U(a))$ множествам вида $\sigma_i(V(a))$, и что каждое $y \in L$ принадлежит не более чем $(V(a) : U(a))$ множествам вида $\sigma_i(W(a))$ [заметить, что если $y \in \sigma_i(W(a))$, то $\sigma_i(U(a))$ содержится в $V(x)$].

Пусть $\mathfrak{F}$ есть ультрафильтр, мажорирующий фильтр сечений системы $\mathfrak{S}$; пусть, далее, A_0 — непустое относительно компактное открытое подмножество из T; положим $\lambda_U(A) = (A : U(a))/(A_0 : U(a))$ для всякого симметричного окружения $U \in \mathfrak{S}$ и любого относительно компактного подмножества A из T. Пусть $\lambda(A) = \lim_{\mathfrak{F}} \lambda_U(A)$; для любого компактного подмножества K из T положим $\lambda'(K) = \inf \lambda(B)$, где B пробегает множество всех относительно компактных открытых окрестностей множества K. Вывести из (1) и (2), что

$$\lambda'(W(a))\,\nu(K) \leqslant \lambda(L)\,\nu(W(a)), \qquad \lambda'(K)\,\nu(W(a)) \leqslant \lambda'(W(a))\,\nu(L).$$

Отсюда заключить, что если K_1 и K_2 — компактные подмножества из T, а $L_1 \supset K_1$, $L_2 \supset K_2$ — относительно компактные открытые множества, то $\lambda'(K_1)\,\nu(K_2) \leqslant \lambda(L_2)\,\nu(L_1)$, и, окончательно, что $\lambda'(K_1)\,\nu(K_2) = \lambda'(K_2)\,\nu(K_1)$.

*15) Пусть G — локально компактная группа и H — ее замкнутая подгруппа, так что G действует непрерывно в G/H. Предположим, что H удовлетворяет следующему условию: для любой окрестности V элемента e в G существует такая окрестность U элемента e, что $HU \subset VH$ [заметить, что это условие выполняется для всякой подгруппы H группы G, если e обладает фундаментальной системой

окрестностей, инвариантных относительно всякого внутреннего автоморфизма группы G]. Показать, что тогда на G/H существует ненулевая положительная мера, инвариантная относительно G. [Применить тот же метод, что и при доказательстве теоремы 1, приняв во внимание, с одной стороны, что когда U пробегает множество всех окрестностей элемента e в G, то образы множеств HUH при каноническом отображении π: $G \to G/H$ образуют фундаментальную систему окрестностей $\pi(H)$, а с другой стороны, что для любой окрестности V элемента e в G и любого компактного подмножества K из G существуют такая окрестность U элемента e в G и такое компактное подмножество L из G, что всякое множество вида $sHUH$, пересекающееся с KH, имеет вид $s'HUH$ с $s' \in L$.]

*16) Пусть G — компактная коммутативная группа и E — плотное подмножество из G, устойчивое относительно закона композиции группы G. Предположим, что для *каждой* ограниченной числовой функции f на E определено число $M(f)$, обладающее следующим свойством: каковы бы ни были ограниченные функции f и g на E, если элементы a_i, b_k из E ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$) и действительные числа α_i, β_k ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$) таковы, что при любом $x \in E$ выполняется неравенство $\sum\limits_i \alpha_i f(xa_i) \leqslant \sum\limits_k \beta_k g(xb_k)$, то

$$\Big(\sum_i \alpha_i\Big) M(f) \leqslant \Big(\sum_k \beta_k\Big) M(g).$$

Предположим, кроме того, что $M(1) = 1$ (ср. Топ. вект. простр., гл. II, Приложение).

a) Пусть μ — нормированная мера Хаара на G. Показать, что для любой непрерывной числовой функции f на G имеем $\int f\,d\mu = M(f \mid E)$. [Рассматривая надлежащее разбиение единицы, сколь угодно хорошо приблизить постоянную функцию на E, равную $\int f\,d\mu$, функциями вида $x \longmapsto \sum\limits_i \alpha_i f(xa_i)$, где $a_i \in E$.]

b) Вывести из a), что если для любого подмножества B из E положить $\nu(B) = M(\varphi_B)$, то для любого открытого подмножества U из G будем иметь $\nu(U \cap E) \geqslant \mu(U)$, а для любого замкнутого подмножества F из G будем иметь $\nu(F \cap E) \leqslant \mu(F)$. Для каждого μ-квадрируемого подмножества P из G (гл. IV, § 5, упражнение 13d) $\nu(P \cap E) = \mu(P)$.

*17) Пусть T — локально компактное пространство, а S — подмножество из T, наделенное законом композиции $(x, y) \longmapsto xy$, превращающим его в моноид (априори, не обязательно имеющий нейтральный элемент) и непрерывным на $S \times S$, когда S наделено топологией, индуцированной из T. Кроме того, предположим, что каждый элемент из S регулярен (Алг., гл. I, § 2, n° 2). Пусть μ — ограни-

ченная положительная мера на T, сосредоточенная в S (так что S μ-измеримо) и имеющая общую массу 1. Предположим, что μ *лево-инвариантна* в следующем смысле: для всякой числовой функции f, определенной на S, непрерывной и ограниченной (а значит, в силу предложения 9 § 5 главы IV, μ-измеримой), $\int f(sx)\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x)$ при всех $s \in E$. То же самое можно выразить, сказав, что $\mu(sK) = \mu(K)$ для любого компактного подмножества K из S.

a) Рассмотрим на $T \times T$ меру-произведение $\mu \otimes \mu$; показать, что существуют такие компактные подмножества K из S, что образы множеств $K \times K$ при непрерывных отображениях $(x, y) \longmapsto (x, xy)$ и $(x, y) \longmapsto (xy, x)$ имеют меру, сколь угодно мало отличающуюся от 1 [воспользоваться теоремой Лебега — Фубини]. Заключить отсюда, что эти образы имеют общую точку, и из этого вывести, что S обладает нейтральным элементом [см. Алг., гл. I, § 2, упражнение 9].

b) Показать, что S — компактная группа. [Сначала доказать, что для всякого $x \in S$ внутренняя мера $\mu_*(xS)$ равна 1, следовательно, xS измеримо и мера сосредоточена в xS; тогда xS есть моноид, к которому можно применить результат пункта a), чем будет показано, что S — группа. Для доказательства компактности S рассуждать как в предложении 2. Наконец, применить упражнение 21 из Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4.]

18) Пусть X — локально компактное пространство, G — компактная группа, действующая непрерывно в X, E — орбита некоторой точки из X и $\mathscr{F}$ — такое векторное пространство непрерывных числовых функций на X, что для любой функции $f \in \mathscr{F}$ и любого $s \in G$ имеем $\gamma(s)f \in \mathscr{F}$; предположим, кроме того, что $\mathscr{F}$ содержит все постоянные функции на X. Пусть $x_0 \in X$ есть точка, инвариантная относительно G и такая, что $|f(x_0)| \leqslant \sup\limits_{y \in E} |f(y)|$ для *всякой* функции $f \in \mathscr{F}$. Показать, что тогда $f(x_0) = \int\limits_G f(sz)\,ds$ для всех $z \in E$ и всех $f \in \mathscr{F}$. [Показать, что существует такая положительная мера ν на E, с общей массой 1, что $f(x_0) = \int\limits_E f(z)\,d\nu(z)$ для всех $f \in \mathscr{F}$, и применить теорему Лебега — Фубини.] °Случай, когда $X = \mathbf{R}^n$, G — ортогональная группа и $x_0 = 0$; применить формулу (7) § 2.$_\circ$

19) Пусть X — компактное пространство, A — нормированная алгебра с единицей над $\mathbf{R}$ и G — компактная группа; предположим, что G действует непрерывно в A и в X и что $a \longmapsto sa$ для любого $s \in G$ есть автоморфизм алгебры A, при котором $\|sa\| = \|a\|$ для всех $a \in A$. Говорят, что отображение f пространства X в A *ковариантно* с G, если

$$f(sx) = sf(x)$$

для всех $s \in G$ и $x \in X$. Пусть B — подкольцо кольца A^X, составленное из ковариантных непрерывных функций и содержащее все ковариант-

ные непрерывные отображения X в $\mathbf{R}$ (где $\mathbf{R}$ отождествлено с некоторой подалгеброй алгебры A; отметим, что для такого отображения g имеем $g(sx) = g(x)$ для всех $s \in G$ и $x \in X$). Пусть, далее, f — ковариантное непрерывное отображение X в A; предположим, что для любого $y \in X$ существует такое отображение $g_y \in B$, что $f(y) = g_y(y)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое отображение $g \in B$, что $\| f(x) - g(x) \| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$. [Применить надлежащее непрерывное разбиение единицы (φ_i) на X и ввести функции h_i, для которых $h_i(x) = \int_G \varphi_i(sx)ds$.]

*20) Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G, A и B — два подмножества из G.

a) Допустим, что выполняется одно из следующих двух условий:

α) A μ-интегрируемо,

β) $\mu^*(A) < +\infty$, а B μ-измеримо.

Показать, что в каждом из этих двух случаев функция $f(s) = \mu^*(sA \cap B)$ равномерно непрерывна на G относительно правой равномерной структуры группы G. [Для любых двух подмножеств M и N из G положим

$$d(M, N) = \mu^*((M \cap \complement N) \cup (N \cap \complement M)).$$

Сначала рассмотреть случай, когда A компактно; используя теорему 4 § 4 главы IV, показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U элемента e в G, что, каковы бы ни были $s \in G$ и $t \in U$,

$$d(sA \cap B, stA \cap B) \leqslant \varepsilon.$$

Затем применить упражнение 9 § 5 главы IV. Показать, что если B μ-измеримо, $\mu^*(A) < +\infty$ и (A_n) — убывающая последовательность интегрируемых подмножеств из G, содержащая A и такая, что $\inf(\mu(A_n)) = \mu^*(A)$, то

$$\mu^*(sA \cap B) = \inf(\mu^*(sA_n \cap B))$$

(гл. V, § 2, лемма 1); с другой стороны, заметить, что $\mu(A_n - A_{n+1})$ стремится к 0 вместе с $1/n$.]

b) Если A μ-интегрируемо и $\mu^*(B) < +\infty$, то функция f равномерно непрерывна относительно и правой и левой равномерных структур группы G; кроме того, тогда $\int_G f(s)d\mu(s) = \mu(A^{-1})\mu^*(B)$. [Свести к случаю, когда B интегрируемо; заметить, что тогда $\mu(sA \cap B) = \mu(A \cap s^{-1}B)$, $\varphi_{sA\cap B} = \varphi_{sA}\varphi_B$ и $\varphi_{sA}(t) = \varphi_{tA^{-1}}(s)$.]

c) Вывести из a), что в обоих рассмотренных случаях множества AB и BA имеют внутренние точки. [См. гл. VIII, § 4, предложение 17.]

d) Привести в группе $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ пример компактного множества A и μ-измеримого множества B, для которых бы $f(s) = \mu(sA \cap B)$

не была равномерно непрерывной относительно левой равномерной структуры. [Заметить, что существуют такая последовательность (t_n) элементов из G, стремящаяся к e, и такая последовательность (s_n) элементов из G, что последовательность $(s_n^{-1} t_n s_n)$ стремится к бесконечности.]

e) Привести пример двух неизмеримых подмножеств A и B локально компактной группы G, имеющих конечную внешнюю меру и таких, чтобы функция $s \longmapsto \mu^*(sA \cap B)$ не была непрерывна (ср. гл. IV, § 4, упражнение 8).

21) a) Пусть G — локально компактная группа и μ — левая мера Хаара на G. Показать, что *устойчивое* множество $S \subset G$, у которого $\mu_*(S) > 0$, обладает внутренними точками [см. упражнение 20]. В частности, подгруппа H группы G, имеющая ненулевую внутреннюю меру, открыта.

b) Если G компактна, то всякое устойчивое множество $S \subset G$, у которого $\mu_*(S) > 0$, есть компактная открытая подгруппа группы G. [Заметить, что внутренность множества S устойчива, и использовать упражнение 17b.]

c) Предположим, что G компактна и коммутативна, с аддитивной записью, и в G существует элемент a бесконечного порядка. Показать, что существует такое устойчивое множество $S \subset G$, что $a \in S$, $-a \notin S$ и $G = S \cup (-S)$ [воспользоваться теоремой Цорна]; вывести из b), что S неизмеримо и $\mu_*(S) = 0$.

22) Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G и A — интегрируемое подмножество из G, у которого $\mu(A) > 0$. Показать, что множество $H(A)$ тех $s \in G$, для которых $\mu(A) = \mu(A \cap sA)$, есть компактная группа. [Заметить, опираясь на упражнение 20, что $H(A)$ замкнуто в G. Чтобы убедиться в компактности $H(A)$, рассмотреть такое компактное подмножество B из A, что $\mu(B) > \mu(A)/2$, и доказать, что $H(A) \subset BB^{-1}$.]

*23) Пусть G — коммутативная локально компактная группа, записываемая аддитивно, μ — мера Хаара на G и A, B — интегрируемые подмножества из G.

a) Пусть для любого $s \in G$

$$A' = \sigma_s(A, B) = A \cup (B + s), \qquad B' = \tau_s(A, B) = (A - s) \cap B.$$

Показать, что $\mu(A') + \mu(B') = \mu(A) + \mu(B)$ и $A' + B' \subset A + B$.

b) Предположим, что 0 принадлежит $A \cap B$. Пара (A', B') интегрируемых подмножеств из G называется *производной* парой от (A, B), если существуют такая последовательность $(s_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ элементов из G и такие две последовательности $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $(B_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ подмножеств из G, что $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_k = \sigma_{s_k}(A_{k-1}, B_{k-1})$, $B_k = \tau_{s_k}(A_{k-1}, B_{k-1})$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $s_k \in A_{k-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и $A' = A_n$, $B' = B_n$. Показать, что существует последовательность таких пар (E_n, F_n), что $E_0 = A$, $F_0 = B$, что (E_{n+1}, F_{n+1}) есть производная пара от (E_n, F_n) и что

$\mu((E_n - s) \cap F_n) \geqslant \mu(F_{n+1}) - 2^{-n}$ при любом n и любом $s \in F_n$. Положим $E_\infty = \bigcup_n E_n$, $F_\infty = \bigcap_n F_n$. Показать, что

$$\mu((E_\infty - s) \cap F_\infty) = \mu(F_\infty)$$

для всех $s \in E_\infty$.

c) Предположим, что $\mu(F_\infty) > 0$. Показать, что функция

$$f(s) = \mu((E_\infty - s) \cap F_\infty)$$

может принимать лишь значения 0 и $\mu(F_\infty)$ и что множество C тех $s \in G$, для которых $f(s) = \mu(F_\infty)$, *открыто-замкнуто*, имеет меру $\mu(C) = \mu(E_\infty)$ и является замыканием множества E_∞ [использовать упражнение 20a) и b)]. С другой стороны, пусть D — множество тех $s \in F_\infty$, для которых пересечение F_∞ с любой окрестностью точки s имеет меру > 0. Показать, что $\mu(D) = \mu(F_\infty)$ и

$$E_\infty + D \subset C;$$

вывести отсюда, что D содержится в подгруппе $H(C)$, определенной в упражнении 22, и что $H(C)$ компактна и открыта в G. Наконец, показать, что $C + H(C) = C$, что $\mu(C) \geqslant \mu(A) + \mu(B) - \mu(H(C))$ и что $C \subset A + B$ [рассмотреть меру множества $E_\infty \cap (c - F_\infty)$ для всех $c \in C$].

d) Вывести из c), что, каковы бы ни были интегрируемые подмножества A и B из G, *либо* $\mu_*(A + B) \geqslant \mu(A) + \mu(B)$, *либо* существует такая компактная открытая подгруппа H группы G, что $A + B$ содержит класс mod H, и тогда $\mu_*(A + B) \geqslant \mu(A) + \mu(B) - \mu(H)$. Случай, когда G связна.

*24) a) Пусть A (соотв. B) — множество всех чисел $x \in \mathbf{R}$, собственное двоичное разложение которых $x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$ (x_0 — целое, $x_i = 0$ или $x_i = 1$ для $i \geqslant 1$) таково, что $x_i = 0$ для всех четных $i > 0$ (соотв. всех нечетных i). Показать, что A и B имеют лебегову меру нуль, однако $A + B = R$.

b) Вывести из a), что существует базис H пространства $\mathbf{R}$ (над $\mathbf{Q}$), содержащийся в $A \cup B$ и, значит, имеющий меру нуль. Множество P_1 всех чисел rh, где $r \in \mathbf{Q}$ и $h \in H$, тоже имеет меру нуль.

c) Обозначим через P_n множество всех действительных чисел, у которых не более n координат относительно базиса H отличны от нуля. Показать, что если P_n пренебрежимо и P_{n+1} измеримо, то P_{n+1} пренебрежимо. [Пусть $h_0 \in H$; вначале показать, что множество S тех $x \in P_{n+1}$, координаты которых относительно h_0 отличны от 0, пренебрежимо. Используя упражнение 20, показать, что если бы P_{n+1} не было пренебрежимым, то в $P_{n+1} \cap \complement S$ существовали бы такие две различные точки x', x'', что $(x' - x'')/h_0$ рационально, и отсюда прийти к противоречию.]

d) Вывести из a) и b), что в $\mathbf{R}$ существуют пренебрежимые множества C и D, для которых $C + D$ неизмеримо.

*25) a) Пусть f — положительная числовая функция, определенная на $\mathbf{R}$, интегрируемая (относительно меры Лебега μ на $\mathbf{R}$), ограниченная и имеющая компактный носитель. Пусть $\gamma = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} f(t)$. Для каждого $w \in \mathbf{R}$ обозначим через $U_f(w)$ множество тех $t \in \mathbf{R}$, для которых $f(t) \geqslant w$; положим $\nu_f(w) = \mu^*(U_f(w))$. Показать, что если $\alpha > 1$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha(t)\, dt = \int_0^\gamma \nu_f(w)\, \alpha w^{\alpha-1}\, dw.$$

b) Обозначим через g вторую числовую функцию, удовлетворяющую тем же условиям, что и f, и положим $\delta = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} g(t)$. Пусть h — функция, определенная на $\mathbf{R}^2$ условиями $h(u, v) = f(u) + g(v)$, если $f(u)\, g(v) \neq 0$, и $h(u, v) = 0$ в противном случае; наконец, положим $k(t) = \sup\limits_{u+v=t} h(u, v)$, так что k положительна, интегрируема, ограничена и имеет компактный носитель. Показать, что если $\alpha > 1$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k^\alpha(t)\, dt \geqslant (\gamma+\delta)^\alpha \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha(t)\, dt + \frac{1}{\delta^\alpha} g^\alpha(t)\, dt \right).$$

[Заметить, что если $0 < w < 1$, то $U_k(\gamma w + \delta w) \supset U_f(\gamma w) + U_g(\delta w)$, и использовать a) и упражнение 23d).]

c) Пусть μ_n — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$ и A, B — интегрируемые подмножества из $\mathbf{R}^n$. Показать, что

$$((\mu_n)_*(A+B))^{1/n} \geqslant (\mu_n(A))^{1/n} + (\mu_n(B))^{1/n}$$

(«*неравенство Брунна — Минковского*»). [Свести к случаю, когда A и B компактны. Затем провести индукцию по n, используя упражнение 23d), теорему Лебега — Фубини, неравенство, доказанное в b), а также неравенство Гёльдера.]

*26) Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G, k — целое $\geqslant 1$ и A — интегрируемое множество. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U элемента e в G, обладающая следующим свойством: для любого конечного множества $S \subset U$, состоящего из k элементов, множество тех $s \in G$, для которых $sS \subset A$, имеет меру $\geqslant (1-\varepsilon)\mu(A)$. [Свести к случаю, когда A компактно, и взять U так, чтобы

$$\mu(AU) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{k-1}\right) \mu(A).$$

Для любого конечного множества $H \subset G$ положим $p(H) = \operatorname{Card}(H)$ и $q(H) = 1$, если $H \neq \varnothing$, $q(H) = 0$, если $H = \varnothing$; оценивая интегралы

$$\int_G p(A \cap sS)\, ds \quad \text{и} \quad \int_G q(A \cap sS)\, ds,$$

показать, обозначая для $h \leqslant k$ через M_h множество тех $s \in G$, для которых $\operatorname{Card}(A \cap sS) = h$, что

$$\sum_{h=1}^{k} h\mu(M_h) = k\mu(A) \quad \text{и} \quad \sum_{h=1}^{k} \mu(M_h) \leqslant \mu(AU).$$

Отсюда заключить, что $\sum_{h=1}^{k-1} h\mu(M_h) \leqslant k\varepsilon\mu(A)$.]

27) Пусть G — группа, действующая в множестве X. Подмножество P (соотв. C) из X называется *G-заполнением* (соотв. *G-покрытием*), если $sP \cap P = \varnothing$ для каждого $s \neq e$ из G (соотв. если $X = \bigcup_{s \in G} sC$). P называется *G-мощением*, если оно одновременно есть G-заполнение и G-покрытие.

a) Предположим, что X локально компактно, что G счетна и действует непрерывно в X и что существует ненулевая положительная мера μ на X, инвариантная относительно G. Пусть P и C — μ-интегрируемые G-заполнение и G-покрытие. Показать, что $\mu(C) \geqslant \mu(P)$. [Заметить, что $\mu(C) \geqslant \sum_{s \in G} \mu(C \cap sP)$.]

b) Предположим, кроме того, что в X существует равномерная структура, согласующаяся с его топологией и имеющая фундаментальную систему $\mathfrak{S}$ открытых окружений, инвариантных относительно G. С другой стороны, обозначим через $\Delta(G)$ нижнюю грань чисел $\mu(C)$ для всех интегрируемых G-покрытий C множества G. Пусть V — окружение, принадлежащее $\mathfrak{S}$, и $a \in X$ таково, что $\mu(V(a)) > \Delta(G)$; показать, что существует такое $s \in G$, что $s \neq e$ и $(a, sa) \in \overset{-1}{V} \circ V$.

c) Предположим, что X — локально компактная группа, μ — ее левая мера Хаара и G — счетная подгруппа группы X, действующая в X как группа левых переносов. При том же определении $\Delta(G)$, что и в b), показать, что если A — интегрируемое подмножество из X, для которого $\mu(A) > \Delta(G)$, то существует такое $s \in G \cap AA^{-1}$, что $s \neq e$. Частный случай, когда $X = \mathbf{R}^n$, а G — дискретная подгруппа ранга n группы $\mathbf{R}^n$: тогда ΔG равно абсолютному значению определителя базиса G над $\mathbf{Z}$ относительно канонического базиса пространства $\mathbf{R}^n$; показать, что если A — такое симметричное выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, что $\mu(A) \geqslant 2^n\Delta(G)$, то в $A \cap G$ существует точка, отличная от 0 (*«теорема Минковского»*).

d) В предположениях пункта a), пусть f — μ-интегрируемая функция $\geqslant 0$ на X. Показать, что в X существуют такие две точки a и b, что

$$\mu(C) \sum_{s \in G} f(sa) \geqslant \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

и

$$\mu(P) \sum_{s \in G} f(sb) \leqslant \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

[Заметить, что если g — интегрируемая функция $\geqslant 0$ и E — μ-интегрируемое множество в X, то существуют такое $c \in E$, что $\int_E g(x)\, d\mu(x) \leqslant g(c)\, \mu(E)$, и такое $c' \in E$, что $\int_E g(x)\, d\mu(x) \geqslant g(c')\, \mu(E)$].

*28) При предположениях упражнения 27а, допустим еще, что существует μ-интегрируемое G-мощение F.

a) Для всякой μ-интегрируемой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на X, положим $\widetilde{f}(x) = \sum_{s \in G} f(sx)$, так что $\int_F \widetilde{f}(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$ (§ 2, предложение 15). Пусть $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — семейство числовых функций $\geqslant 0$, μ-интегрируемых на X; для $i \neq j$ положим

$$m_{ij} = \int_F \widetilde{f}_i(x)\, \widetilde{f}_j(x)\, d\mu(x),$$

и пусть $c_i = \sup_{x \in X} \widetilde{f}_i(x)$. Показать, что существует хотя бы одна пара различных индексов (i, j), для которой

$$m_{ij} \geqslant \frac{1}{n(n-1)\,\mu(F)} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \int_X f_i(x)\, d\mu(x) \right)^2 - \mu(F) \sum_{i=1}^{n} c_i \int_X f_i(x)\, dx \right).$$

[Оценить снизу сумму $\sum_{i \neq j} m_{ij}$, используя неравенство Коши — Шварца.] Вывести отсюда, что если $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство μ-интегрируемых G-заполнений и $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) > \mu(F)$, то существуют такая пара (i, j) различных индексов и такое $s \in G$, что $\mu(A_i s \cap A_j) > 0$.

b) Если G_0 — подгруппа группы G конечного индекса $(G : G_0) = h$ и $(s_1, \ldots, s_h)$ — система представителей левых классов $\operatorname{mod} G_0$ в G, то $F_0 = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant h} s_i F$ есть G_0-мощение.

c) Пусть A — симметричное выпуклое тело в $X = \mathbf{R}^n$; пусть, далее, $u_i \colon (x_j) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$ m линейных форм на X с целыми коэффициентами c_{ij} $(m < n)$. Показать, что для любого целого $p \geqslant 1$

и любого числа $r \geqslant 0$, удовлетворяющего неравенству $\mu(A) r^n \geqslant 2^n p^m$, существует точка $x \in rA$, отличная от 0 и такая, что $u_i(x) \equiv 0 \pmod p$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. [Применить теорему Минковского к подгруппе G_0 группы $\mathbf{Z}^n$, составленной из тех $z \in \mathbf{Z}^n$, для которых $u_i(z) \equiv 0 \pmod p$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, и использовать b).] Частный случай, когда $n=2$, $m=1$ и A определено неравенствами $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$ (*теорема Туэ*).

*29) a) Пусть p — простое число; существуют такие целые числа a, b, что $a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ (Алг., гл. V, § 11, следствие теоремы 3). Показать, что существуют такие целые x_1, x_2, x_3, x_4, не все равные нулю, что $ax_1 + bx_2 \equiv x_3 \pmod p$, $bx_1 - ax_2 \equiv x_4 \pmod p$ и

$$y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant \sqrt{2}\, p$$

[тот же метод, что и в упражнении 28c]. Показать, что y делится на p, и вывести отсюда, что $y = p$.

b) Вывести из a), что всякое целое $n \geqslant 0$ представимо в виде суммы не более четырех квадратов [«*теорема Лагранжа*»; использовать упражнение 11 из Алг., гл. IV, § 2].

30) Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G и ν — ограниченная мера на G. Предположим, что отображение $s \longmapsto \gamma(s)\nu$ группы G в банахово пространство $\mathscr{M}^1(G)$ непрерывно. Показать, что мера ν имеет базис μ. [Пусть A — μ-пренебрежимое компактное подмножество из G. Рассуждая как при доказательстве предложения 11, показать, что $\nu(xA) = 0$ для x, пробегающих всюду плотное подмножество из G. Вывести отсюда, что $\nu(A) = 0$.]

Обратно, если ν имеет базис μ, то отображение $s \longmapsto \gamma(s)\nu$ группы G в $\mathscr{M}^1(G)$ непрерывно: см. гл. VIII, § 2, предложение 8.

§ 2. Факторизация пространства по группе; однородные пространства

1. *Общие результаты*

Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует справа, непрерывно и *совершенно*, локально компактная группа H, по закону $(x, \xi) \longmapsto x\xi$ $(x \in X, \xi \in H)$. Отношение эквивалентности, определяемое группой H в X, открыто (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, лемма 2) и пространство X/H отделимо (там же, § 4, предложение 3), а значит, локально компактно (Общ. топ., гл. I, 3-е изд., § 10, предложение 10). Обозначим через π каноническое отображение X на X/H. Насыщение множества $Y \subset X$ есть $YH = \pi^{-1}(\pi(Y))$. Если K — компактное подмножество из X, то $\pi(K)$ компактно и $\pi^{-1}(\pi(K))$ замкнуто в X. Всякое

компактное подмножество из X/H есть образ при отображении π некоторого компактного подмножества из X (Общ. топ., гл. I, 3-е изд., § 10, предложение 10). *Предположим раз и навсегда заданной левую меру Хаара β на H.*

Пусть χ есть непрерывное представление группы H в $\mathbf{R}_+^*$. Если функция g на X удовлетворяет равенству $g(x\xi) = \chi(\xi)g(x)$ при любых $x \in X$ и $\xi \in H$, то ее носитель S инвариантен относительно H и записывается, следовательно, в виде $\pi^{-1}(\pi(S))$. Обозначим через $\mathscr{K}^\chi(X)$ пространство Рисса, образованное непрерывными числовыми функциями g на X, которые удовлетворяют равенству $g(x\xi) = \chi(\xi)g(x)$ ($x \in X$, $\xi \in H$) и носитель которых является насыщением некоторого компактного подмножества из X; через $\mathscr{K}_+^\chi(X)$ обозначим множество всех элементов $\geqslant 0$ из $\mathscr{K}_+^\chi(X)$. В частности, $\mathscr{K}^1(X)$ есть не что иное, как множество всех непрерывных функций на X, постоянных на орбитах и имеющих носитель, являющийся насыщением некоторого компактного множества.

Предложение 1. *Пусть f — непрерывная числовая функция на X, носитель которой S имеет компактное пересечение с насыщением любого компактного подмножества из X.*

a) *Для любого $x \in X$ функция $\xi \mapsto f(x\xi)$ на H принадлежит $\mathscr{K}(H)$; пусть*

$$f^\chi(x) = \int_H f(x\xi)\,\chi(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi). \tag{1}$$

b) *Функция f^χ непрерывна, обращается в нуль вне SH и удовлетворяет равенству $f^\chi(x\xi) = \chi(\xi)f^\chi(x)$.*

c) *Если g — непрерывная числовая функция на X, удовлетворяющая равенству $g(x\xi) = \chi(\xi)g(x)$, то $(fg)^\chi = f^1 g$* (где f^1 задано формулой (1), в которой за χ принято представление $\xi \mapsto 1$ группы H в $\mathbf{R}_+^*$).

d) *Если $\eta \in H$, то $(\delta(\eta)f)^\chi = \chi(\eta)\Delta_H(\eta)^{-1}f^\chi$.*

Пусть $x_0 \in X$ и V — компактная окрестность x_0 в X. Множество тех $\xi \in H$, для которых $V\xi$ пересекается с S, является также множеством тех $\xi \in H$, для которых $V\xi$ пересекается с $S \cap VH$, и, значит, компактно в H, поскольку $S \cap VH$ компактно, а группа H действует совершенно в X (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4,

теорема 1); тогда лемма 1 § 1 доказывает a) и непрерывность f^{χ}. Оставшаяся часть b) очевидна. Наконец, c) и d) вытекают из следующих выкладок:

$$\begin{aligned}(fg)^{\chi}(x) &= \int_H f(x\xi)\,g(x\xi)\,\chi(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi) = \\ &= \int_H f(x\xi)\,g(x)\,\chi(\xi)\,\chi(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi) = \\ &= g(x)\int_H f(x\xi)\,d\beta(\xi) = g(x)\,f^1(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta(\eta)f)^{\chi}(x) &= \int_H f(x\xi\eta)\,\chi(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi) = \\ &= \Delta_H(\eta)^{-1}\int_H f(x\xi)\,\chi(\xi\eta^{-1})^{-1}\,d\beta(\xi) = \\ &= \chi(\eta)\,\Delta_H(\eta)^{-1}\int_H f(x\xi)\,\chi(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi).\end{aligned}$$

Предложение 2. *Отображение* $f \mapsto f^{\chi}$ *пространства* $\mathcal{K}(X)$ *в* $\mathcal{K}^{\chi}(X)$ *линейно, и образом пространства* $\mathcal{K}(X)$ (соотв. $\mathcal{K}_+(X)$) *служит* $\mathcal{K}^{\chi}(X)$ (соотв. $\mathcal{K}_+^{\chi}(X)$).

Линейность очевидна. Ясно, что $f^{\chi} \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$. Тогда достаточно применить следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть* K — *компактное подмножество из* X *и* u — *такая функция из* $\mathcal{K}_+(X)$, *что* $u(x) > 0$ *для всех* $x \in K$. *Пусть* $g \in \mathcal{K}^{\chi}(X)$ *такова, что* $\operatorname{supp} g \subset KH$.

a) $\inf\limits_{x \in KH} u^1(x) > 0$,

b) *Функция* h, *равная* g/u^1 *на* KH *и* 0 *на* $X - KH$, *принадлежит* $\mathcal{K}^{\chi}(X)$.

c) $g = (uh)^{\chi}$.

Так как $u^1(x) > 0$ для всех $x \in K$, то $\inf\limits_{x \in KH} u^1(x) = \inf\limits_{x \in K} u^1(x) > 0$ Отсюда сразу следует утверждение b). Наконец, в силу предложения 1c), имеем $(uh)^{\chi} = u^1 h$, и ясно, что $u^1 h = g$.

Пусть I — относительно ограниченная линейная форма (гл. II, § 2, n° 2) на $\mathcal{K}^{\chi}(X)$. Тогда $f \mapsto I(f^{\chi})$ есть относительно ограниченная линейная форма на $\mathcal{K}(X)$, то есть некоторая *мера* μ_I

на X. Отображение $I \longmapsto \mu_I$, согласно предложению 2, инъективно. Меры μ_I на X, полученные таким путем, могут быть охарактеризованы следующим образом:

Предложение 3. *Пусть μ — мера на X. Следующие условия равносильны:*

a) *Существует такая относительно ограниченная линейная форма I на $\mathcal{K}^\chi(X)$, что $I(f^\chi) = \mu(f)$ для любой функции $f \in \mathcal{K}(X)$.*

b) $\delta(\xi)\mu = \chi(\xi)^{-1}\Delta_H(\xi)\mu$ *для любого* $\xi \in H$.

c) *Для любых f и g из $\mathcal{K}(X)$ справедливо равенство*

$$\mu(f \cdot g^1) = \mu(f^\chi \cdot g). \tag{2}$$

d) *Если $f \in \mathcal{K}(X)$ такова, что $f^\chi = 0$, то $\mu(f) = 0$.*

a) $\Rightarrow$ b): если $\mu(f) = I(f^\chi)$, то, в силу предложения 1d),

$$\langle \delta(\xi)\mu, f\rangle = \langle \mu, \delta(\xi^{-1})f\rangle = I((\delta(\xi^{-1})f)^\chi = \\ = I(\chi(\xi)^{-1}\Delta_H(\xi)f^\chi) = \chi(\xi)^{-1}\Delta_H(\xi)\langle\mu, f\rangle,$$

так что $\delta(\xi)\mu = \chi(\xi)^{-1}\Delta_H(\xi)\mu$.

b) $\Rightarrow$ c): предположим условие b) выполненным. Заметим, что функции $(x, \xi) \longmapsto f(x)g(x\xi)$ и $(x, \xi) \longmapsto f(x\xi)g(x)$ на $X \times H$ непрерывны и имеют компактный носитель (так как H действует в X совершенно); тогда теорема 2 § 5 главы III позволяет написать

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) \int_H g(x\xi)\,d\beta(\xi) = \int_H d\beta(\xi) \int_X f(x)g(x\xi)\,d\mu(x) = \\ = \int_H d\beta(\xi) \int_X f(x\xi^{-1})g(x)\chi(\xi)\Delta_H(\xi)^{-1}\,d\mu(x) = \\ = \int_X g(x)\,d\mu(x) \int_H f(x\xi^{-1})\chi(\xi)\Delta_H(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi) = \\ = \int_X g(x)\,d\mu(x) \int_H f(x\xi)\chi(\xi)^{-1}\,d\beta(\xi),$$

чем и доказано c).

c) $\Rightarrow$ d): если выполнено c) и $f^\chi = 0$, то $\mu(f \cdot g^1) = 0$ для всех $g \in \mathcal{K}(X)$, и, значит, $\mu(f) = 0$, если выбрать $g \in \mathcal{K}(X)$ так, чтобы $g' = 1$ на $\operatorname{supp} f$ (что возможно в силу предложения 2 с $\chi = 1$).

d) $\Rightarrow$ a): если условие d) выполнено, то существует такая линейная форма I на $\mathcal{K}^\chi(X)$, что $\mu(f) = I(f^\chi)$ для всех $f \in \mathcal{K}(X)$, и эта форма, согласно предложению 2, относительно ограничена.

2. *Случай* $\chi = 1$

Если f — функция на X/H, то $f \circ \pi$ есть функция на X, постоянная на орбитах и непрерывная в том и только том случае, когда f непрерывна. В частности, отображение $f \longmapsto f \circ \pi$ определяет *биекцию* пространства $\mathscr{K}(X/H)$ на $\mathscr{K}^1(X)$.

Следовательно, в случае, когда $\chi = 1$, можно следующим образом переформулировать некоторые результаты n° 1:

Пусть f — непрерывная числовая функция на X, носитель которой имеет компактное пересечение с насыщением любого компактного подмножества из X. Формула

$$f^\flat(\pi(x)) = \int_H f(x\xi)\, d\beta(\xi) \tag{3}$$

определяет непрерывную функцию $f^\flat$ на X/H. Для всякой непрерывной функции g на X/H имеем

$$(f \cdot g \circ \pi)^\flat = f^\flat \cdot g. \tag{4}$$

Если $\eta \in H$, то

$$(\delta(\eta) f)^\flat = \Delta_H(\eta)^{-1} f^\flat. \tag{5}$$

Не следует забывать, что определение функции $f^\flat$ зависит от выбора меры β. Если H компактно и β нормирована, то $f^\flat$ называется иногда *орбитальным средним* функции f.

Если $f \in \mathscr{K}(X)$, то $f^\flat \in \mathscr{K}(X/H)$. Отображение $f \longmapsto f^\flat$ пространства $\mathscr{K}(X)$ в $\mathscr{K}(X/H)$ линейно и образом пространства $\mathscr{K}(X)$ (соотв. $\mathscr{K}_+(X)$ служит $\mathscr{K}(X/H)$ (соотв. $\mathscr{K}_+(X/H)$).

Замечание 1. Покажем, что отображение $f \longmapsto f^\flat$ есть *строгий морфизм* (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 8) пространства $\mathscr{K}(X)$ на $\mathscr{K}(X/H)$.

а) Это отображение непрерывно: достаточно доказать, что для любого компактного подмножества K из X сужение отображения $f \longmapsto f^\flat$ на $\mathscr{K}(X, K)$ есть непрерывное отображение пространства $\mathscr{K}(X, K)$ в $\mathscr{K}(X/H, \pi(K))$ (Топ. вект. простр., гл. II, § 2, следствие предложения 1); а так как H действует в X совершенно, то множество P тех $\xi \in H$, для которых $K\xi$ пересекается с K, компактно; из формулы (3) заключаем, что $\sup\limits_{x \in K} |f^\flat(\pi(x))| \leqslant \beta(P) \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$, чем наше утверждение доказано.

b) Пусть K' — компактное подмножество из X/H. Выберем в X такое компактное подмножество K, чтобы $\pi(K) = K'$, и покажем, что сужение отображения $f \longmapsto f^\flat$ на $\mathscr{K}(X, K)$ есть строгий морфизм пространства $\mathscr{K}(X, K)$ на $\mathscr{K}(X/H, K')$. Достаточно построить для этого сужения правое обратное (Топ. вект. простр., гл. I, § 1, предложение 13). Но, согласно лемме 1 (обозначения которой мы принимаем), такое обратное мы получим путем композиции следующих отображений:

α) отображения $f' \longmapsto f' \circ \pi$ пространства $\mathscr{K}(X/H, K')$ в множество E тех функций из $\mathscr{K}'(X)$, носитель которых содержится в KH;

β) отображения E в E, которое всякой функции $g \in E$ ставит в соответствие функцию, равную g/u^1 на KH и 0 на $X - KH$;

γ) отображения E в $\mathscr{K}(X)$, которое всякой функции $h \in E$ ставит в соответствие uh.

c) Теперь, если V — выпуклая окрестность нуля в $\mathscr{K}(X)$, то $V \cap \mathscr{K}(X, K)$ есть выпуклая окрестность нуля в $\mathscr{K}(X, K)$ и, следовательно, $V^\flat \cap \mathscr{K}(X/H, K')$, согласно b), есть выпуклая окрестность нуля в $\mathscr{K}(X/H, K')$, а стало быть, $V^\flat$ есть окрестность нуля в $\mathscr{K}(X/H)$ (Топ. вект. простр., гл. II, § 2, n° 4). Это завершает доказательство.

Предложение 4. a) *Пусть λ — мера на X/H. Существует, и притом единственная, мера $\lambda^\#$ на X такая, что*

$$\int_{X/H} f^\flat \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda^\#, \tag{6}$$

какова бы ни была $f \in \mathscr{K}(X)$. При этом $\delta(\xi)\lambda^\# = \Delta_H(\xi)\lambda^\#$ для каждого $\xi \in H$.

b) *Обратно, пусть μ есть такая мера на X, что $\delta(\xi)\mu = \Delta_H(\xi)\mu$ для каждого $\xi \in H$. Существует, и притом единственная, мера λ на X/H такая, что $\mu = \lambda^\#$.*

Это частный случай сказанного в n° 1.

Определение 1. *В предположениях и обозначениях предложения 4, λ называется фактормерой меры μ по мере β и обозначается $\frac{\mu}{\beta}$ или μ/β.*

Отображение $\lambda \longmapsto \lambda^\#$ пространства $\mathscr{M}(X/H)$ в $\mathscr{M}(X)$ есть не что иное, как *сопряженное* к отображению $f \longmapsto f^\flat$ пространства $\mathscr{K}(X)$ в $\mathscr{K}(X/H)$. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в $\mathscr{M}(X/H)$; утвержде-

ние, что $\lim\limits_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda^{\#}(f) = 0$ для всех $f \in \mathscr{K}(X)$, равносильно утверждению, что $\lim\limits_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda(f') = 0$ для всех $f' \in \mathscr{K}(X/H)$; следовательно, отображение $\lambda \longmapsto \lambda^{\#}$ является для широких топологий изоморфизмом пространства $\mathscr{M}(X/H)$ на векторное подпространство пространства $\mathscr{M}(X)$. Это подпространство *замкнуто в широкой топологии*, так как представляет собой множество тех $\mu \in \mathscr{M}(X)$, для которых $\delta(\xi)\mu = \Delta_H(\xi)\mu$ при любом $\xi \in H$. Ясно, что условия $\lambda \geqslant 0$ и $\lambda^{\#} \geqslant 0$ равносильны.

Формула (6), по аналогии с обычным обозначением для двойных интегралов, записывается в виде

$$\int_X f(x)\, d\lambda^{\#}(x) = \int_{X/H} d\lambda(\dot{x}) \int_H f(x\xi)\, d\beta(\xi) \qquad (\dot{x} = \pi(x)). \tag{7}$$

Здесь допущена некоторая вольность обозначений, поскольку интеграл $\int_H f(x\xi)\, d\beta(\xi)$ рассматривается как функция от $\dot{x}$, а не от x; этот способ записи будет часто использоваться в дальнейшем, если не будет угрозы путаницы.

Замечание 2. Пусть E — локально выпуклое пространство и $\boldsymbol{m}$ — векторная мера на X/H со значениями в E. Тогда отображение $f \longmapsto \boldsymbol{m}(f^{\flat})$ пространства $\mathscr{K}(X)$ в E будет векторной мерой на X со значениями в E, и мы опять обозначим ее $\boldsymbol{m}^{\#}$. Отображение $\boldsymbol{m} \longmapsto \boldsymbol{m}^{\#}$ снова является *изоморфизмом* пространства $\mathscr{L}(\mathscr{K}(X/H); E)$ на некоторое векторное подпространство A пространства $\mathscr{L}(\mathscr{K}(X); E)$ (если наделить эти пространства топологиями простой сходимости). Более того, поскольку отображение $f \longmapsto f^{\flat}$ есть сюръективный строгий морфизм, подпространство A состоит в точности из векторных мер $\boldsymbol{n}$ на X, обращающихся в нуль на ядре N отображения $f \longmapsto f^{\flat}$. Таким образом, для того чтобы $\boldsymbol{n} \in A$, необходимо и достаточно, чтобы скалярные меры $z' \circ \boldsymbol{n}$ были равны нулю на N для всех $z' \in E'$. Тогда из предложения 3 вытекает, что $\boldsymbol{n} \in N$ в том и только том случае, если

$$\delta(\xi)\,\mathbf{n} = \Delta_H(\xi)\,\mathbf{n}$$

для всех $\xi \in H$.

3. *Другая интерпретация меры $\lambda^{\#}$*

Для любого $x \in X$ отображение $\xi \longmapsto x\xi$ группы H в X *совершенно* (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4, предложение 4), и, значит, β имеет при этом отображении меру-образ на X, сосредоточенную на орбите xH (гл. V, § 6, следствие 3 предложения 2); а так как

β левоинвариантна, то эта мера-образ зависит лишь от класса $u=\pi(x)$ элемента x в X/H и будет обозначаться β_u. По определению, для $f \in \mathscr{K}(X)$ имеем

$$\int_X f(y)\,d\beta_u(y) = \int_H f(x\xi)\,d\beta(\xi) = f^\flat\,(u). \tag{8}$$

Таким образом, видим, что

$$(\varepsilon_u)^\# = \beta_u. \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть f — функция на X со значениями в некотором топологическом пространстве.*

a) *Если f — числовая функция $\geqslant 0$, то для всех $x \in X$ имеем*

$$\int_X^* f(y)\,d\beta_{\dot{x}}(y) = \int_H^* f(x\xi)\,d\beta(\xi) \qquad (\dot{x}=\pi(x)).$$

b) *Для того чтобы f была $\beta_{\dot{x}}$-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы функция $\xi \mapsto f(x\xi)$ на H была β-измеримой.*

c) *Предположим, что f есть функция на X со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$; тогда для того, чтобы f была $\beta_{\dot{x}}$-интегрируемой* (соотв. *существенно $\beta_{\dot{x}}$-интегрируемой*), *необходимо и достаточно, чтобы функция $\xi \mapsto f(x\xi)$ на H была β-интегрируемой* (соотв. *существенно β-интегрируемой*), *и тогда* $\int_X f(y)\,d\beta_{\dot{x}}(y) = \int_H f(x\xi)\,d\beta(\xi)$.

Это вытекает из предложений 2 и 3 и теоремы 2 § 4 главы V.

Так как $f^\flat \in \mathscr{K}(X/H)$ для $f \in \mathscr{K}(X)$, то формула (8) показывает, что отображение $u \mapsto \beta_u$ пространства X/H в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно, что семейство (β_u) λ-согласовано для любой положительной меры λ на X/H и что

$$\lambda^\# = \int_{X/H} \beta_u\,d\lambda(u); \tag{10}$$

тем самым получена новая интерпретация для $\lambda^\#$.

Предложение 5. *Пусть λ — положительная мера на X/H.*

a) *Пусть f есть $\lambda^\#$-измеримая функция на X со значениями в топологическом пространстве, постоянная вне некоторого счет-*

ного объединения $\lambda^{\#}$-интегрируемых множеств. Тогда множество тех $\dot{x} \in X/H$, для которых функция $\xi \mapsto f(x\xi)$ не β-измерима, локально λ-пренебрежимо.

b) *Пусть f есть $\lambda^{\#}$-измеримая функция $\geqslant 0$ на X, равная нулю вне некоторого счетного объединения $\lambda^{\#}$-интегрируемых множеств. Тогда функция $\dot{x} \mapsto \int^* f(x\xi)\, d\beta(\xi)$ на X/H λ-измерима и*

$$\int_X^* f(x)\, d\lambda^{\#}(x) = \int_{X/H}^* d\lambda(\dot{x}) \int_H^* f(x\xi)\, d\beta(\xi) \qquad (\dot{x} = \pi(x)).$$

c) *Пусть f есть $\lambda^{\#}$-интегрируемая функция на X со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Тогда множество тех $\dot{x} \in X/H$, в которых функция $\xi \mapsto f(x\xi)$ не β-интегрируема, λ-пренебрежимо; функция $f^{\flat}$ на X/H, определенная почти всюду формулой*

$$f^{\flat}(\dot{x}) = \int_H f(x\xi)\, d\beta(\xi) \qquad (\dot{x} = \pi(x)), \tag{11}$$

λ-интегрируема, причем

$$\int_{X/H} f^{\flat}\, d\lambda = \int_X f\, d\lambda^{\#} \tag{12}$$

и

$$\int_{X/H} |f^{\flat}|\, d\lambda \leqslant \int_X |f|\, d\lambda^{\#}. \tag{13}$$

d) *Пусть f есть $\lambda^{\#}$-измеримая функция на X со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$, обращающаяся в нуль вне некоторого счетного объединения $\lambda^{\#}$-интегрируемых множеств. Тогда для того, чтобы f была $\lambda^{\#}$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{X/H}^* d\lambda(\dot{x}) \int_H^* |f(x\xi)|\, d\beta(\xi) < +\infty \qquad (\dot{x} = \pi(x)).$$

В силу леммы 2, условия a), b) и c) вытекают из предложений 3 и 4 и теоремы 1 § 3 главы V (за исключением (13), которая следует из (12), так как ясно, что $|f^{\flat}| \leqslant |f|^{\flat}$); d) вытекает из b).

Предложение 6. *Пусть λ — положительная мера на X/H.*

a) *Пусть N — подмножество из X/H. Для того чтобы N было локально λ-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы $\pi^{-1}(N)$ было локально $\lambda^{\#}$-пренебрежимо.*

b) *Пусть g — функция на X/H со значениями в топологическом пространстве. Для того чтобы g была λ-измерима, необходимо и достаточно, чтобы $g \circ \pi$ была $\lambda^{\#}$-измерима.*

c) *Пусть $\boldsymbol{h}$ — функция на X/H со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы $\boldsymbol{h}$ была локально $\lambda^{\#}$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{h} \circ \pi$ была локально $\lambda^{\#}$-интегрируема, и тогда $(\boldsymbol{h} \cdot \lambda)^{\#} = (\boldsymbol{h} \circ \pi) \cdot \lambda^{\#}$.*

Допустим, что $\boldsymbol{h} \circ \pi$ локально $\lambda^{\#}$-интегрируема. Для любой $f \in \mathscr{K}(X)$ функция $f \cdot (\boldsymbol{h} \circ \pi)$ $\lambda^{\#}$-интегрируема, а значит (предложение 5), функция $(f \cdot (\boldsymbol{h} \circ \pi))^{\flat} = f^{\flat} \cdot \boldsymbol{h}$ λ-интегрируема и

$$\int_{X/H} f^{\flat} \cdot \boldsymbol{h}\, d\lambda = \int_X f \cdot (\boldsymbol{h} \circ \pi)\, d\lambda^{\#}.$$

Поскольку $f \longmapsto f^{\flat}$ есть сюръективное отображение пространства $\mathscr{K}(X)$ на $\mathscr{K}(X/H)$, это показывает, что $\boldsymbol{h}$ локально λ-интегрируема и

$$(\boldsymbol{h} \cdot \lambda)^{\#} = (\boldsymbol{h} \circ \pi) \cdot \lambda^{\#}.$$

В частности, если $\pi^{-1}(N)$ локально $\lambda^{\#}$-пренебрежимо, то $\varphi_N \circ \pi$ локально $\lambda^{\#}$-пренебрежимо, так что $(\varphi_N \cdot \lambda)^{\#} = (\varphi_N \circ \pi) \cdot \lambda^{\#} = 0$, а следовательно, $\varphi_N \cdot \lambda = 0$ и N локально λ-пренебрежимо. Предположим теперь, что $g \circ \pi$ $\lambda^{\#}$-измерима. Пусть K' — компактное подмножество из X/H. Пусть, далее, $f \in \mathscr{K}_+(X)$ такова, что $f^{\flat} = 1$ на K' (предложение 2) и $K = \operatorname{supp} f$; имеем $\pi(K) \supset K'$. Существует разбиение множества K, состоящее из $\lambda^{\#}$-пренебрежимого множества M и последовательности (K_n) таких компактных множеств, что $(g \circ \pi) | K_n$ непрерывна при любом n. Тогда $g | \pi(K_n)$ непрерывна. Пусть P — множество всех точек из K, не принадлежащих $\pi(K_1) \cup \pi(K_2) \cup \ldots$; тогда $\pi^{-1}(P) \cap K$ содержится в M и, значит, $\lambda^{\#}$-пренебрежимо; следовательно, функция $f \cdot \varphi_{\pi^{-1}(P)}$ $\lambda^{\#}$-пренебре-

жима; отсюда вытекает (предложение 5), что

$$0=\int\limits_X f\cdot\varphi_{\pi^{-1}(P)}\,d\lambda^{\#}=\int\limits_{X/H} f^{\flat}\cdot\varphi_P\,d\lambda\geqslant\int\limits_{X/H}^{*}\varphi_P\,d\lambda,$$

и, стало быть, P λ-пренебрежимо, а g λ-измерима.

Если N локально λ-пренебрежимо, то $\pi^{-1}(N)$ локально $\lambda^{\#}$-пренебрежимо (Приложение 2). Если g λ-измерима, то $g\circ\pi$ $\lambda^{\#}$-измерима (там же). Наконец, предположим, что $\boldsymbol{h}$ локально λ-интегрируема. Тогда, как уже известно, $\boldsymbol{h}\circ\pi$ $\lambda^{\#}$-измерима. Для любой функции $f\in\mathscr{K}_+(X)$, согласно предложению 5, имеем

$$\int\limits_X^{*} f(x)\,|\boldsymbol{h}|\,(\pi(x))\,d\lambda^{\#}(x)=\int\limits_{X/H}^{*}|\boldsymbol{h}|\,(u)\,f^{\flat}(u)\,d\lambda(u)<+\infty,$$

и, значит, $\boldsymbol{h}\circ\pi$ локально $\lambda^{\#}$-интегрируема.

Следствие 1. *Пусть λ и λ' — положительные меры на X/H. Для того чтобы λ' имела базис λ, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda'^{\#}$ имела базис $\lambda^{\#}$. Для того чтобы λ и λ' были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda^{\#}$ и $\lambda'^{\#}$ были эквивалентны.*

Первое утверждение вытекает из предложения 6, a) и c), и теоремы Лебега — Никодима (гл. V, § 5, теорема 2). Второе следует из первого.

Следствие 2. *Пусть λ — положительная мера на X/H, а f — $\lambda^{\#}$-измеримая числовая функция на X. Предположим, что $\delta(\xi)f=f$ локально $\lambda^{\#}$-почти всюду для любого $\xi\in H$. Тогда существует такая λ-измеримая функция g на X/H, что $f=g\circ\pi$ локально $\lambda^{\#}$-почти всюду.*

Заменой f на $f/(1+|f|)$ сводим все к случаю, когда f ограничена, а значит, локально $\lambda^{\#}$-интегрируема. Пусть $\mu=f\cdot\lambda^{\#}$. Условие, наложенное на f, влечет, что $\delta(\xi)\,\mu=f\cdot\delta(\xi)\,\lambda^{\#}=\Delta_H(\xi)\,\mu$ для любого $\xi\in H$. Тогда (предложение 4) существует такая мера λ' на X/H, что $\mu=\lambda'^{\#}$. Согласно следствию 1, на X/H существует такая локально λ-интегрируемая функция g, что $\lambda'=g\cdot\lambda$. В силу предложения 6 имеем $f\cdot\lambda^{\#}=\lambda'^{\#}=(g\circ\pi)\cdot\lambda^{\#}$, откуда $f=g\circ\pi$ локально $\lambda^{\#}$-почти всюду.

Следствие 3. a) *Пусть* $(\lambda_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство действительных мер на* X/H. *Для того чтобы семейство* (λ_ι) *было мажорировано в* $\mathscr{M}(X/H)$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $(\lambda_\iota^{\#})$ *было мажорировано в* $\mathscr{M}(X)$, *и тогда справедливо равенство*

$$\sup(\lambda_\iota^{\#}) = (\sup \lambda_\iota)^{\#}.$$

b) *Пусть* λ — *действительная мера на* X/H. *Имеем* $(\lambda^+)^{\#} = (\lambda^{\#})^+$ *и* $(\lambda^-)^{\#} = (\lambda^{\#})^-$.

c) *Пусть* λ — *комплексная мера на* X/H. *Тогда* $|\lambda|^{\#} = |\lambda^{\#}|$.

Допустим, что семейство (λ_ι) мажорировано, и положим $\mu = \sup \lambda_\iota$. Так как $\lambda \geqslant 0$ влечет $\lambda^{\#} \geqslant 0$, то $\mu^{\#} \geqslant \lambda_\iota^{\#}$ для каждого ι, чем показано, что семейство $(\lambda_\iota^{\#})$ мажорировано и

$$(\sup \lambda_\iota)^{\#} \geqslant \sup(\lambda_\iota^{\#}).$$

Обратно, допустим, что семейство $(\lambda_\iota^{\#})$ мажорировано, и пусть $\nu = \sup(\lambda_\iota^{\#})$. Так как $\delta(\xi)\lambda_\iota^{\#} = \Delta_H(\xi)\lambda_\iota^{\#}$ для любого $\xi \in H$, то, очевидно, $\delta(\xi)\nu = \Delta_H(\xi)\nu$, и, следовательно, существует такая мера $\mu' \in \mathscr{M}(X/H)$, что $\nu = \mu'^{\#}$. А так как $\lambda^{\#} \geqslant 0$ влечет $\lambda \geqslant 0$, то $\mu' \geqslant \lambda_\iota$ для каждого ι, чем показано, что семейство (λ_ι) мажорировано и $\nu = \mu'^{\#} \geqslant (\sup \lambda_\iota)^{\#}$, откуда

$$\sup(\lambda_\iota^{\#}) \geqslant (\sup \lambda_\iota)^{\#},$$

что и завершает доказательство утверждения a). Отсюда сразу вытекает утверждение b), так как, например, λ^+ есть не что иное, как $\sup(\lambda, 0)$. Для доказательства c) достаточно заметить, что $|\lambda| = \sup \mathfrak{R}(\alpha\lambda)$ для комплексных α с модулем, равным 1, а с другой стороны, что $\mathfrak{R}(\mu^{\#}) = (\mathfrak{R}\mu)^{\#}$ для каждого $\mu \in \mathscr{M}(X/H)$.

Замечания. 1) Предложение 6a) можно выразить иначе, сказав, что λ есть *псевдообраз* меры $\lambda^{\#}$ при отображении π (гл. VI, § 3, определение 1).

2) Предположим, что H *компактно*, а β нормирована. Насыщение любого компактного подмножества из X компактно. Следовательно, если $f \in \mathscr{K}(X/H)$, то $f \circ \pi \in \mathscr{K}(X)$, и для любой положи-

тельной меры λ на X/H предложение 5c) дает нам

$$\int_X (f \circ \pi)(x)\, d\lambda^\#(x) = \int_{X/H} f(u)\, d\lambda(u).$$

Иными словами, λ есть *образ* меры $\lambda^\#$ при отображении π.

3) Следствие 3c) предложения 6 сразу показывает, что результаты этого n° остаются справедливыми для случая комплексных мер (кроме тех, в которых присутствует верхний интеграл).

4) Пусть $\boldsymbol{m}$ есть векторная мера на X/H со значениями в E и q — полунепрерывная снизу полунорма на E. Для того чтобы $\boldsymbol{m}$ была q-мажорируема (гл. VI, § 2, определение 3), необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала $\boldsymbol{m}^\#$, и тогда $q(\boldsymbol{m}^\#) = q(\boldsymbol{m})^\#$. Это сразу вытекает из определений и следствия 3a).

Пусть, с другой стороны, μ есть положительная мера на X/H. Для того чтобы $\boldsymbol{m}$ имела скалярно базис μ, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{m}^\#$ имела скалярно базис $\mu^\#$: это вытекает из следствия 1.

Наконец, если $\boldsymbol{m}$ имеет базис μ и плотность f относительно μ (гл. VI, § 2, определение 4), то $\boldsymbol{m}^\#$ имеет базис $\mu^\#$ и плотность $f \circ \pi$: это следует из предложения 6c).

4. *Случай, когда X/H паракомпактно*

Если X/H паракомпактно, то мы прежде всего убедимся в том, что векторные пространства $\mathcal{K}^\chi(X)$ с переменным χ все *изоморфны* между собой и, в частности, изоморфны $\mathcal{K}^1(X)$.

Предложение 7. *Предположим, что X/H паракомпактно. Пусть χ — непрерывное представление H в $\mathbf{R}_+^*$.*

a) *На X существует такая непрерывная функция r со значениями >0, что $r(x\xi) = \chi(\xi) r(x)$ для любых $x \in X$ и $\xi \in H$.*

b) *Отображение $g \mapsto g/r$ есть изоморфизм векторного пространства $\mathcal{K}^\chi(X)$ на векторное пространство $\mathcal{K}^1(X)$.*

Применим предложение 1, взяв в качестве f функцию $\geqslant 0$, не равную тождественно нулю ни на какой орбите (что возможно в силу леммы 1 Приложения 1); тогда $r = f^\chi$ удовлетворяет условиям, указанным в a). Утверждение b) очевидно.

Предложение 8. *Предположим, что X/H паракомпактно. Существует непрерывная функция $h \geqslant 0$ на X, носитель которой имеет компактное пересечение с насыщением любого компактного*

подмножества из X и такая, что $h^{\flat} = 1$. Для такой функции имеем $g = (h\cdot(g\circ\pi))^{\flat}$, какова бы ни была непрерывная функция g на X/H.

Применим предложение 1 с $\chi = 1$, взяв в качестве f функцию $\geqslant 0$, не равную тождественно нулю ни на какой орбите. $f^1(x) > 0$ в каждой точке x их X. Положим $h = f/f^1$. Тогда $h^1 = f^1/f^1 = 1$, и, следовательно, $h^{\flat} = 1$. Поэтому для всякой непрерывной функции g на X/H имеем $(h\cdot(g\circ\pi))^{\flat} = h^{\flat}\cdot g = g$.

Замечания. 1) Пусть, в частности, X — локально компактное пространство, на котором действует справа, непрерывно и совершенно, *дискретная* группа D; предположим, что X/D паракомпактно. Тогда на X существует непрерывная функция $h \geqslant 0$, носитель которой имеет компактное пересечение с насыщением любого компактного подмножества из X и такая, что $\sum_{d\in D} h(xd) = 1$ для любого $x \in X$ (все члены суммы, кроме конечного их числа, равны нулю).

2) Сохраним предположения и обозначения предложения 8. Отображение $g \mapsto h\cdot(g\circ\pi)$ есть непрерывное отображение пространства $\mathcal{K}(X/H)$ в $\mathcal{K}(X)$, являющееся *правым обратным* к отображению $f \mapsto f^{\flat}$. Следовательно, всякое ограниченное (соотв. компактное) подмножество из $\mathcal{K}(X/H)$ есть образ некоторого ограниченного (соотв. компактного) подмножества из $\mathcal{K}(X)$. Отсюда сразу следует, что отображение $\lambda \mapsto \lambda^{\#}$ есть снова изоморфизм пространства $\mathcal{M}(X/H)$ на замкнутое векторное подпространство пространства $\mathcal{M}(X)$ при наделении этих пространств топологией ограниченной (соотв. компактной) сходимости.

Предложение 9. *При сохранении предположений и обозначений предложения 8, пусть λ — положительная мера на X/H.*

a) *Пара (π, h) $\lambda^{\#}$-приспособлена и $\int_X h(x)\,\varepsilon_{\pi(x)}\,d\lambda^{\#}(x) = \lambda$.*

b) *Отображение π является собственным относительно меры $h\cdot\lambda^{\#}$, и $\pi(h\cdot\lambda^{\#}) = \lambda$.*

c) *Пусть $\mathbf{k}$ есть функция на X/H со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы $\mathbf{k}$ была измерима*

(соотв. *локально интегрируема*, *существенно интегрируема*, *интегрируема*) *относительно* λ, *необходимо и достаточно, чтобы* $h\cdot(\mathbf{k}\circ\pi)$ *была таковой относительно* $\lambda^{\#}$; *и если* $\mathbf{k}$ *существенно интегрируема относительно* λ, *то*

$$\int_{X/H} \mathbf{k}\, d\lambda = \int_{X} h\cdot(\mathbf{k}\circ\pi)\, d\lambda^{\#}. \tag{14}$$

Пусть $f\in\mathscr{K}(X/H)$. Тогда $h\cdot(f\circ\pi)\in\mathscr{K}(X)$, и

$$\int_X h(x)\, f(\pi(x))\, d\lambda^{\#}(x)=\int_{X/H} f(\dot{x})\, d\lambda(\dot{x})\int_H h(x\xi)\, d\beta(\xi)=\int_{X/H} f(\dot{x})\, d\lambda(\dot{x}),$$

откуда следует a). Утверждение b) доказывается точно так же. Тогда утверждения из c), касающиеся измеримости и существенной интегрируемости, равно как и формула (14), выводятся применением результатов главы V (§ 4, предложение 3, § 5, предложение 4, § 4, теорема 2). Если $\boldsymbol{k}$ λ-интегрируема, то $h\cdot(\boldsymbol{k}\circ\pi)$ $\lambda^{\#}$-интегрируема (гл. V, § 3, теорема 1). Если $h\cdot(\boldsymbol{k}\circ\pi)$ $\lambda^{\#}$-интегрируема, то предложение 5 показывает, что $(h\cdot(\boldsymbol{k}\circ\pi))^{\flat}=h^{\flat}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$ $\lambda^{\#}$-интегрируема. Если $\boldsymbol{k}$ локально λ-интегрируема, то $h\cdot(\boldsymbol{k}\circ\pi)$ локально $\lambda^{\#}$-интегрируема (предложение 6). Предположим, наконец, что $h\cdot(\boldsymbol{k}\circ\pi)$ локально $\lambda^{\#}$-интегрируема; для любого $f\in\mathscr{K}(X/H)$ функция $h\cdot(\boldsymbol{k}\circ\pi)\cdot(f\circ\pi)$ имеет компактный носитель и

$$|h\cdot(\mathbf{k}\circ\pi)\cdot(f\circ\pi)|\leqslant M\,|h\cdot(\mathbf{k}\circ\pi)|,$$

где $M=\sup|f|$; следовательно, $h\cdot((\boldsymbol{k}f)\circ\pi)$ $\lambda^{\#}$-интегрируема и, значит, $\boldsymbol{k}f$ λ-интегрируема в силу уже доказанного; это показывает, что $\boldsymbol{k}$ локально λ-интегрируема.

Следствие. *Непрерывное линейное отображение* $f\mapsto f^{\flat}$ *пространства* $L^1(X,\lambda^{\#})$ *в* $L^1(X/H,\lambda)$, *определенное предложением* 5, *сюръективно*.

Предположим сначала, что X/H паракомпактно, и пусть h — функция на X, удовлетворяющая условиям предложения 8. Если k — существенно λ-интегрируемая числовая функция, то $h\cdot(k\circ\pi)$ существенно $\lambda^{\#}$-интегрируема и, очевидно, $(h\cdot(k\circ\pi))^{\flat}=k$.

В общем случае, пусть $u \in L^1(X/H, \lambda)$. Существует функция $f \in \mathscr{L}^1(X/H, \lambda)$, принадлежащая классу u и обращающаяся в нуль вне некоторого счетного объединения компактных множеств K_n. Определим по индукции последовательность таких относительно компактных открытых множеств U_n из X/H, что $U_{n+1} \supset K_n \cup \cup \overline{U}_n$, и пусть V — объединение множеств U_n. Тогда V есть открытое подмножество из X/H, являющееся счетным объединением компактных подмножеств $\overline{U}_n$, и, стало быть, паракомпактно (Общ. топ., гл. I, 3-е изд., § 9, теорема 5). Положим $Y = \pi^{-1}(V)$ и обозначим через λ_V (соотв. $\lambda_Y^\#$) меру, индуцированную на V (соотв. Y) мерой λ (соотв. $\lambda^\#$). Ясно, что Y/H отождествимо с V (Общ. топ., гл. I, 3-е изд., § 3, предложение 10), а $\lambda_Y^\#$ отождествимо с $(\lambda_V)^\#$. Кроме того, f равна нулю вне V и принадлежит $\mathscr{L}^1(V, \lambda_V)$. Следовательно, существует такая функция $g \in \mathscr{L}^1(Y, \lambda_Y^\#)$, что $g^\flat = f$ почти всюду на V. Продолжив g нулем на $X - Y$, получим функцию $g_1 \in \mathscr{L}^1(X, \lambda^\#)$, и ясно, что класс функции $g_1^\flat$ в $L^1(X/H, \lambda)$ есть не что иное, как u.

Замечание 3. Предположим, что X/H паракомпактно, и сохраним обозначения предложения 9. Тогда отображение $k \longmapsto h(k \circ \pi)$ пространства $L^1(X/H, \lambda)$ в $L^1(X, \lambda^\#)$ *изометрично* в силу (14) и является *правым обратным* к отображению $f \longmapsto f^\flat$ пространства $L^1(X, \lambda^\#)$ на $L^1(X/H, \lambda)$.

5. *Квазиинвариантные меры на однородном пространстве*

Лемма 3. *Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G, ν и ν' — ненулевые квазиинвариантные меры на G. Если для любого $s \in G$ плотности $\gamma(s)\nu$ относительно ν и $\gamma(s)\nu'$ относительно ν' равны локально μ-почти всюду, то ν и ν' пропорциональны.*

$\nu = \rho \cdot \mu$, $\nu' = \rho' \cdot \mu$, где ρ и ρ' — локально μ-интегрируемые функции на G, всюду отличные от нуля (§ 1, предложение 11). Для любого $s \in G$ имеем

$$\gamma(s)\nu = (\gamma(s)\rho) \cdot \mu, \qquad \gamma(s)\nu' = (\gamma(s)\rho') \cdot \mu,$$

и, в силу условия леммы, $\rho^{-1}\cdot\gamma(s)\rho = \rho'^{-1}\cdot\gamma(s)\rho'$ локально μ-почти всюду. Положим $\sigma = \rho'/\rho$; σ — μ-измеримая функция на G. Для любого $s \in G$ имеем $\gamma(s)\sigma = \sigma$ локально μ-почти всюду. Поэтому, в силу следствия 2 предложения 6, примененного к $X = H = G$, σ равна постоянной локально μ-почти всюду.

Пусть G — локально компактная группа и H — ее замкнутая подгруппа. Рассмотрим однородное пространство G/H левых классов по H, на котором G действует непрерывно слева. Покажем, что существует, и притом *единственный, класс* ненулевых квазиинвариантных мер на G/H.

Заметим, что H действует на G непрерывно и совершенно как группа правых переносов; и порождаемое при этом факторпространство, являющееся не чем иным, как G/H, паракомпактно (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4, предложение 13). Таким образом, применимы результаты n°n° 1—4 с $X = G$. Следовательно, имеем отображения $f \mapsto f^\flat$ пространства $\mathscr{K}(G)$ на $\mathscr{K}(G/H)$ и $\lambda \mapsto \lambda^\#$ пространства $\mathscr{M}(G/H)$ в $\mathscr{M}(G)$ (как только на H зафиксирована левая мера Хаара β). То, что G действует слева в G/H, порождает дополнительное свойство:

$$\gamma_{G/H}(s)\cdot f^\flat = (\gamma_G(s)\cdot f)^\flat \qquad (s \in G,\ f \in \mathscr{K}(G)), \tag{15}$$

$$(\gamma_{G/H}(s)\cdot\lambda)^\# = \gamma_G(s)\cdot\lambda^\# \qquad (s \in G,\ \lambda \in \mathscr{M}(G/H)). \tag{16}$$

В самом деле, для любого $x \in G$ имеем

$$(\gamma_{G/H}(s)\cdot f^\flat)(\pi(x)) = f^\flat(s^{-1}\pi(x)) = f^\flat(\pi(s^{-1}x)) =$$

$$= \int_H f(s^{-1}x\xi)\,d\beta(\xi) = \int_H (\gamma_G(s)f)(x\xi)\,d\beta(\xi) = (\gamma_G(s)f)^\flat(\pi(x)),$$

откуда следует формула (15), влекущая формулу (16).

Лемма 4. *Пусть λ — ненулевая мера на G/H и μ — левая мера Хаара на G. Следующие свойства равносильны:*

a) *λ квазиинвариантна относительно G;*

b) *для того чтобы множество $A \subset G/H$ было локально λ-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы $\pi^{-1}(A)$ было локально μ-пренебрежимо;*

c) *мера $\lambda^\#$ эквивалентна μ.*

Предположим, что эти условия выполнены, и пусть $\lambda^{\#} = \rho \cdot \mu$, *где* ρ — *локально* μ-*интегрируемая функция, всюду отличная от нуля. Тогда для любого* $s \in G$ *плотность* θ_s *меры* $\gamma_{G/H}(s)\lambda$ *относительно* λ *такова, что*

$$\theta_s(\pi(x)) = \frac{\rho(s^{-1}x)}{\rho(x)} \tag{17}$$

локально μ-*почти всюду на* G.

c) $\Rightarrow$ b): это сразу следует из предложения 6a).

b) $\Rightarrow$ a): если свойство b) выполняется, то множество локально λ-пренебрежимых подмножеств из G/H инвариантно относительно G и, следовательно, λ квазиинвариантна относительно G.

a) $\Rightarrow$ c): предположим, что λ квазиинвариантна относительно G; для любого $s \in G$ меры λ и $\gamma_{G/H}(s)\lambda$ эквивалентны и, значит, $\lambda^{\#}$ и

$$\gamma_G(s) \cdot \lambda^{\#} = (\gamma_{G/H}(s) \cdot \lambda)^{\#}$$

эквивалентны (следствие 1 предложения 6); так как $\lambda^{\#} \neq 0$, то $\lambda^{\#}$ эквивалентна μ (§ 1, предложение 11).

Кроме того, для любого $s \in G$ имеем

$$(\theta_s \circ \pi) \cdot \lambda^{\#} = (\theta_s \cdot \lambda)^{\#} = (\gamma_{G/H}(s)\,\lambda)^{\#} = \gamma_G(s)\,\lambda^{\#} =$$
$$= (\gamma_G(s)\,\rho) \cdot \mu = \frac{\gamma_G(s)\rho}{\rho}\,\lambda^{\#},$$

откуда следует (17).

Равносильность a) и b) влечет прежде всего сформулированный уже выше результат единственности, и даже более точный результат:

Теорема 1. *Пусть* G — *локально компактная группа и* H — *ее замкнутая подгруппа.*

a) *Две ненулевые квазиинвариантные меры на* G/H *эквивалентны; подмножества из* G/H, *локально пренебрежимые относительно этих мер,— это те подмножества, прообразы которых в* G *локально пренебрежимы относительно меры Хаара.*

b) *Пусть* λ *и* λ' — *ненулевые квазиинвариантные меры на* G/H. *Если для любого* $s \in G$ *плотности меры* $\gamma_{G/H}(s)\lambda$ *относительно* λ *и меры* $\gamma_{G/H}(s)\lambda'$ *относительно* λ' *равны локально почти всюду относительно* λ *(или* λ'*), то* λ *и* λ' *пропорциональны.*

a) сразу следует из леммы 4. Пусть λ и λ' — ненулевые квазиинвариантные меры, удовлетворяющие условию утверждения b). Тогда для любого $s \in G$ плотности меры $\gamma_G(s)\lambda^{\#}$ относительно $\lambda^{\#}$ и меры $\gamma_G(s)\lambda'^{\#}$ относительно $\lambda'^{\#}$ равны локально μ-почти всюду и, следовательно (лемма 3), $\lambda^{\#}$ и $\lambda'^{\#}$ пропорциональны, а значит, λ и λ' пропорциональны.

С другой стороны, лемма 4 сводит отыскание ненулевых квазиинвариантных мер на G/H к отысканию мер на G, эквивалентных мере Хаара и имеющих вид $\lambda^{\#}$. На этот счет имеется следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть μ — левая мера Хаара на G и ρ — локально μ-интегрируемая функция. Для того чтобы $\rho\cdot\mu$ имела вид $\lambda^{\#}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\xi \in H$ выполнялось равенство*

$$\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\rho(x) \tag{18}$$

локально μ-почти всюду на G.

Утверждение, что $\rho\cdot\mu$ имеет вид $\lambda^{\#}$, сводится к тому, что для любого $\xi \in H$ имеем $\delta(\xi)(\rho\cdot\mu) = \Delta_H(\xi)\rho\cdot\mu$ (предложение 4). Но

$$\delta(\xi)(\rho\cdot\mu) = (\delta(\xi)\rho)\cdot(\delta(\xi)\mu) = \Delta_G(\xi)(\delta(\xi)\rho)\cdot\mu,$$

откуда и следует лемма.

Теперь мы можем установить сформулированный выше результат существования и даже более точный результат:

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, μ — левая мера Хаара на G и β — левая мера Хаара на H.*

a) *Существуют такие непрерывные функции $\rho > 0$ на G, что $\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\rho(x)$, каковы бы ни были $x \in G$ и $\xi \in H$.*

b) *Если задана такая функция ρ, можно построить меру $\lambda = (\rho\cdot\mu)/\beta$ на G/H, и эта мера λ будет положительной ненулевой квазиинвариантной относительно G.*

c) *$\rho(sx)/\rho(x)$ при s, x из G зависит только от s и $\pi(x)$ и, следовательно, определяет такую непрерывную функцию $\chi > 0$ на*

$G\times(G/H)$, *что*

$$\chi(s,\ \pi(x))=\frac{\rho(sx)}{\rho(x)}. \tag{19}$$

Тогда имеем

$$\gamma_{G/H}(s)\lambda = \chi(s^{-1},\cdot)\cdot\lambda \ \textit{ для всех } \ s\in G. \tag{20}$$

a) вытекает из предложения 7.

b) вытекает из лемм 5 и 4.

c) вытекает из (17).

Замечания. 1) Из замечания 1 n° 3 следует, что ненулевые квазиинвариантные меры на G/H — не что иное, как псевдообразы при отображении π меры Хаара на G.

°2) Если G — группа Ли, то, как мы покажем в своем месте, функцию ρ теоремы 2 можно выбрать бесконечно дифференцируемой.$_\circ$

При условиях теоремы 2 некоторым результатам n°n° 3 и 4 можно придать следующий, более специальный вид (учитывая теорему 2 и предложение 2 § 4 главы V, чтобы перейти от свойств относительно μ к свойствам относительно $\rho\cdot\mu$):

a) Пусть f есть μ-измеримая функция на G со значениями в топологическом пространстве, постоянная вне счетного объединения μ-интегрируемых множеств; тогда множество тех $\dot{x}\in G/H$, для которых функция $\xi\longmapsto f(x\xi)$ не β-измерима, локально λ-пренебрежимо.

b) Пусть f есть μ-измеримая функция $\geqslant 0$ на G, равная нулю вне счетного объединения μ-интегрируемых множеств. Тогда функция $\dot{x}\longmapsto \int_H^* f(x\xi)\,d\beta(\xi)$ на G/H λ-измерима и

$$\int_G^* f(x)\,\rho(x)\,d\mu(x)=\int_{G/H}^* d\lambda(\dot{x})\int_H^* f(x\xi)\,d\beta(\xi) \qquad (\dot{x}=\pi(x)).$$

c) Пусть f есть μ-интегрируемая функция на G со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Тогда множество тех $\dot{x}\in G/H$, для которых $\xi\longmapsto f(x\xi)$ не β-интегрируема, λ-пренебрежимо; функция $\dot{x}\longmapsto \int_H f(x\xi)\,d\beta(\xi)$ λ-интегрируема и

$$\int_G f(x)\,\rho(x)\,d\mu(x)=\int_{G/H} d\lambda(\dot{x})\int_H f(x\xi)\,d\beta(\xi).$$

d) На G существует непрерывная функция $h \geqslant 0$, носитель которой имеет компактное пересечение с насыщением KH каждого компактного подмножества K из G и такая, что $\int\limits_H h(x\xi)\, d\beta(\xi) = 1$ для всех $x \in G$. Для того чтобы функция g на G/H была измерима (соотв. локально интегрируема, существенно интегрируема, интегрируема) относительно λ, необходимо и достаточно, чтобы $h \cdot (g \circ \pi)$ была таковой относительно μ; и когда g существенно интегрируема относительно λ, имеем

$$\int\limits_{G/H} g(u)\, d\lambda(u) = \int\limits_G h(x)\, g(\pi(x))\, \rho(x)\, d\mu(x).$$

6. *Относительно инвариантные меры на однородном пространстве*

Пусть всегда G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа и β — левая мера Хаара на H.

Лемма 6. *Пусть λ — мера на G/H и χ — непрерывное представление G в* $\mathbf{C}^*$. *Следующие свойства равносильны:*

a) λ *относительно инвариантна на G/H с мультипликатором* χ;

b) $\lambda^\#$ *относительно инвариантна на G с левым мультипликатором* χ;

c) $\lambda^\#$ *имеет вид* $a\chi \cdot \mu$ $(a \in \mathbf{C})$.

Условие a) означает, что для любого $s \in G$ имеем

$$\gamma_{G/H}(s)\, \lambda = \chi(s)^{-1} \lambda;$$

это равносильно тому, что $(\gamma_{G/H}(s)\, \lambda)^\# = \chi(s)^{-1} \lambda^\#$, то есть

$$\gamma_G(s)\, \lambda^\# = \chi(s)^{-1} \lambda^\#.$$

Отсюда — равносильность a) и b). Равносильность b) и c) вытекает из следствия 1 предложения 10 § 1.

Теорема 3. *Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа,* μ (соотв. β) — *левая мера Хаара на* G (соотв. H) *и* χ — *непрерывное представление G в* $\mathbf{C}^*$.

a) *Для того чтобы на G/H существовала ненулевая относительно инвариантная относительно G мера с мультипликатором* χ,

необходимо и достаточно, чтобы $\chi(\xi) = \Delta_H(\xi)/\Delta_G(\xi)$ *для всех* $\xi \in H$.

b) *Тогда эта мера единственна с точностью до постоянного множителя; более точно, она пропорциональна* $(\chi \cdot \mu)/\beta$.

Для того чтобы на G/H существовала ненулевая относительно инвариантная относительно G мера с мультипликатором χ, необходимо и достаточно (лемма 6), чтобы $\chi \cdot \mu$ имела вид $\lambda^{\#}$, и, следовательно (предложение 4), чтобы $\delta(\xi)(\chi \cdot \mu) = \Delta_H(\xi)(\chi \cdot \mu)$ для всех $\xi \in H$. Это условие записывается так же в виде $\chi(\xi)\chi \cdot \Delta_G(\xi)\mu = \Delta_H(\xi)\chi \cdot \mu$, то есть

$$\chi(\xi) = \Delta_H(\xi)/\Delta_G(\xi),$$

для всех $\xi \in H$. Отсюда следует a). Утверждение b) сразу следует из леммы 6 и того факта, что отображение $\lambda \mapsto \lambda^{\#}$ инъективно.

В § 3 (n° 3, пример 4) мы приведем очень простые примеры, в которых представление $\xi \mapsto \Delta_H(\xi)/\Delta_G(\xi)$ не продолжается до непрерывного представления группы G в $\mathbf{C}^*$. Стало быть, в этом случае не существует никакой ненулевой комплексной меры на G/H, относительно инвариантной относительно G.

Следствие 1. *Для того чтобы на G/H существовала ненулевая положительная мера, относительно инвариантная относительно G, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное представление группы G в $\mathbf{R}_+^*$, продолжающее представление* $\xi \mapsto \Delta_H(\xi)/\Delta_G(\xi)$.

Отметим, что когда H *унимодулярна*, это условие выполняется.

Следствие 2. *Для того чтобы на G/H существовала ненулевая положительная мера, инвариантная относительно G, необходимо и достаточно, чтобы Δ_G совпадала с Δ_H на H.*

Следствие 3. *Предположим, что H унимодулярна и на G/H существует ненулевая ограниченная положительная мера ν, относительно инвариантная относительно G. Тогда ν инвариантна, а G унимодулярна.*

Пусть χ — мультипликатор меры ν. Для любого $s \in G$ меры ν и $\gamma(s)\nu$ имеют одинаковую конечную общую массу (§ 1, формула (6)); а так как $\gamma(s)\nu = \chi(s)^{-1}\nu$, то $\chi(s) = 1$. Следовательно, ν инвариантна. В силу следствия 2, $\Delta_G(s) = 1$ для всех $s \in H$. Пусть

G' — множество тех $t \in G$, для которых $\Delta_G(t) = 1$. Это — замкнутый нормальный делитель группы G, содержащий H. Пусть π — каноническое отображение G/H на G/G'. Тогда $\pi(\nu)$ — ненулевая ограниченная положительная мера, инвариантная относительно G. Поэтому левая мера Хаара группы G/G' ограничена, так что G/G' компактна (§ 1, предложение 2). Следовательно, образ группы G при отображении Δ_G есть компактная подгруппа из $\mathbf{R}_+^*$; эта подгруппа сводится к $\{1\}$, и, значит, $\Delta_G = 1$ на всей группе G.

7. *Мера Хаара на факторгруппе*

Предложение 10. *Пусть G — локально компактная группа, G' — ее замкнутый нормальный делитель, G'' — группа G/G', π — каноническое отображение группы G на G/G' и α, α', α'' — левые меры Хаара на G, G', G''.*

a) *Домножив, в случае необходимости, α на постоянный множитель, имеем $\alpha'' = \alpha/\alpha'$. В частности, если $f \in \mathscr{K}(G)$, то*

$$\int_G f(x)\,d\alpha(x) = \int_{G''} d\alpha''(\dot{x}) \int_{G'} f(x\xi)\,d\alpha'(\xi) \qquad (\dot{x} = \pi(x)).$$

b) $\Delta_G(\xi) = \Delta_{G'}(\xi)$ *для всех $\xi \in G'$; в частности, если G унимодулярна, то G' тоже унимодулярна.*

c) *Ядро представления Δ_G группы G в $\mathbf{R}_+^*$ есть наибольший унимодулярный замкнутый нормальный делитель группы G.*

Применяя теорему 3 с $\chi = 1$ (зная, что здесь существует мера на G/G', инвариантная относительно G, а именно, α''), получаем a) и b); c) тотчас следует из b).

Предложение 11. *В обозначениях предложения 10, пусть u — такой автоморфизм группы G, что $u(G') = G'$, далее, u' — сужение u на G' и u'' — автоморфизм группы G'', получающийся из u факторизацией. Тогда*

$$\mathrm{mod}_G(u) = \mathrm{mod}_{G'}(u')\,\mathrm{mod}_{G''}(u'').$$

В самом деле, если $\alpha'' = \alpha/\alpha'$, то $u''(\alpha'') = u(\alpha)/u'(\alpha')$, то есть $\mathrm{mod}_{G''}(u'')^{-1}(\alpha'') = \mathrm{mod}_G(u)^{-1}\alpha/\mathrm{mod}_{G'}(u')^{-1}\alpha' = \dfrac{\mathrm{mod}_{G'}(u')}{\mathrm{mod}_G(u)}(\alpha/\alpha') = \dfrac{\mathrm{mod}_{G'}(u')}{\mathrm{mod}_G(u)}\alpha''$, откуда и следует предложение.

Следствие. *Для любого* $x \in G$ *имеем*

$$\Delta_G(x) = \Delta_{G/G'}(\dot{x}) \operatorname{mod}(i_x),$$

где $\dot{x}$ *означает канонический образ элемента* x *в* G/G', *а* i_x — *автоморфизм* $s \mapsto x^{-1}sx$ *группы* G'.

Это вытекает из предложения 11 и формулы (33) § 1.

8. *Одно свойство транзитивности*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ X/H' \arrow[d] \\ X/H \end{tikzcd}$$

Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует справа, непрерывно и *совершенно*, локально компактная группа H, по закону $(x, \xi) \mapsto x\xi$ $(x \in X, \ \xi \in H)$. Пусть, далее, H' — замкнутая подгруппа группы H; тогда H' действует справа непрерывно и *совершенно* в X. Обозначим через π, π' и ρ канонические отображения X на X/H, X на X/H' и H на H/H'.

Пусть β и β' — левые меры Хаара на H и H'; предположим, что Δ_H и $\Delta_{H'}$ *совпадают на* H'; значит, можно построить меру β/β' на H/H', левоинвариантную относительно H (теорема 3). С другой стороны, пусть μ — такая положительная мера на X, что

$$\delta(\xi)\mu = \Delta_H(\xi)\mu$$

для всех $\xi \in H$; значит, можно построить меры μ/β на X/H и μ/β' на X/H' (предложение 4). Запишем μ/β' как *интеграл*, относительно μ/β, семейства мер на X/H', индексами которого служат точки из X/H. При $H' = \{e\}$ мы вновь приходим к ситуации n° 3.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi'"'] & H \arrow[l, "\psi_x"'] \arrow[d, "\rho"] \\ X/H' & H/H' \arrow[l, "\omega_x"] \end{tikzcd}$$

Отображение $(x, \xi) \mapsto \pi'(x\xi)$ произведения $X \times H$ в X/H' непрерывно; а так как $\pi'(x\xi) = \pi'(x\xi\xi')$ для всех $\xi' \in H'$, то это отображение определяет факторизацией *непрерывное* отображение произведения $X \times (H/H')$ в X/H'; отсюда, для каждого фиксированного $x \in X$ имеется частичное отображение ω_x: $H/H' \to X/H'$, получаемое факторизацией из отображения ψ_x: $\xi \mapsto x\xi$ группы H в X. Отметим, что $\psi_{x\xi} = \psi_x \circ \gamma_H(\xi)$ и, значит, $\omega_{x\xi} = \omega_x \circ \gamma_{H/H'}(\xi)$ для всех $\xi \in H$.

Лемма 7. *Пусть K — компактное подмножество из X/H', а L — компактное подмножество из X. Тогда $\bigcup_{x\in L} \omega_x^{-1}(K)$ относительно компактно в H/H'.*

Пусть K_1 — такое компактное подмножество из X, что $\pi'(K_1) = K$. И пусть K_2 — множество тех $\xi \in H$, для которых $L\xi$ пересекается с K_1. Тогда K_2 компактно (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4, теорема 1). Пусть ξ таково, что $p(\xi) \in \bigcup_{x\in L} \omega_x^{-1}(K)$. Следовательно, существует такое $x \in L$, что $\omega_x(p(\xi)) \in K$; иными словами, такое, что $\pi'(x\xi) \in K$. Поскольку $\pi'(K_1) = K$, существует такое $\xi' \in H'$, что $x\xi\xi' \in K_1$. Тогда $\xi\xi' \in K_2$, и, значит, $p(\xi) = p(\xi\xi') \in p(K_2)$. Таким образом, доказано, что $\bigcup_{x\in L} \omega_x^{-1}(K) \subset p(K_2)$.

Эта лемма показывает прежде всего, что отображение ω_x *совершенно*. Стало быть, можно образовать меру $\omega_x(\beta/\beta')$ на X/H', сосредоточенную на $\omega_x(H/H') = \pi'(\psi_x(H)) = \pi'(xH)$. Если $f \in \mathscr{K}(X/H')$, то доказанная только что лемма 7 и лемма 1 § 1 показывают, что функция $x \mapsto \langle f, \omega_x(\beta/\beta')\rangle$ непрерывна на X; кроме того, $\langle f, \omega_x(\beta/\beta')\rangle$ обращается в нуль, когда $\operatorname{supp} f$ не пересекается с $\pi'(xH)$, иначе говоря, когда $\pi(x)$ не принадлежит каноническому образу $\operatorname{supp} f$ в X/H.

Впрочем, если $\xi \in H$, то

$$\omega_{x\xi}(\beta/\beta') = \omega_x(\gamma_{H/H'}(\xi)(\beta/\beta')) = \omega_x(\beta/\beta').$$

Следовательно, отображение $x \mapsto \omega_x(\beta/\beta')$ пространства X в $\mathscr{M}(X/H')$ определяет факторизацией отображение $u \mapsto (\beta/\beta')_u$ пространства X/H в $\mathscr{M}(X/H')$. Вышеизложенное показывает, что для каждого $f \in \mathscr{K}(X/H')$ отображение $u \mapsto \langle f, (\beta/\beta')_u\rangle$ непрерывно и имеет компактный носитель. Следовательно, *отображение $u \mapsto (\beta/\beta')_u$ есть широко непрерывное и (μ/β)-согласованное семейство мер на X/H', имеющее X/H множеством индексов.*

Пусть $x \in X$ и $u = \pi(x) \in X/H$. Пусть, далее, f — функция на X/H' со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Согласно теореме 2 § 4 главы V, для того, чтобы f была $(\beta/\beta')_u$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция $p(\xi) \mapsto f(\omega_x(p(\xi))) = f(\pi'(x\xi))$ на H/H' была (β/β')-интегрируема, и тогда

$$\int_{X/H'} f(u')\, d(\beta/\beta')_u(u') = \int_{H/H'} f(\pi'(x\xi))\, d(\beta/\beta')(\dot{\xi}) \quad (\dot{\xi} = p(\xi)). \quad (21)$$

Аналогичные свойства имеют место для измеримости, верхнего интеграла и существенного интеграла.

Предложение 12. *Имеем*

$$\int_{X/H} (\beta/\beta')_u \, d(\mu/\beta)(u) = \mu/\beta'. \tag{22}$$

Пусть $f \in \mathscr{K}(X)$ и пусть $f^\flat \in \mathscr{K}(X/H')$ определена равенством

$$f^\flat(\pi'(x)) = \int_{H'} f(x\xi') \, d\beta'(\xi').$$

Достаточно доказать (см. n° 2), что $f^\flat$ имеет один и тот же интеграл относительно обеих частей равенства (22). Но $\langle \mu/\beta', f^\flat \rangle = \langle \mu, f \rangle$. С другой стороны,

$$\left\langle \int_{X/H} (\beta/\beta')_u \, d(\mu/\beta)(u), \; f^\flat \right\rangle = \int_{X/H} \langle \beta/\beta' \rangle_u, \; f^\flat \rangle \, d(\mu/\beta)(u).$$

Пусть $x \in X$ и $u = \pi(x)$. Имеем

$$\langle (\beta/\beta')_u, \; f^\flat \rangle = \langle \omega_x(\beta/\beta'), \; f^\flat \rangle = \int_{H/H'} f^\flat(\omega_x(\dot\xi)) \, d(\beta/\beta')(\dot\xi) =$$

$$= \int_{H/H'} f^\flat(\pi'(x\xi)) \, d(\beta/\beta')(\dot\xi) = \int_{H/H'} d(\beta/\beta')(\dot\xi) \int_{H'} f(x\xi\xi') \, d\beta'(\xi') =$$

$$= \int_H f(x\xi) \, d\beta(\xi).$$

Следовательно,

$$\left\langle \int_{X/H} (\beta/\beta')_u \, d(\mu/\beta)(u), \; f^\flat \right\rangle = \int_{X/H} d(\mu/\beta)(u) \int_H f(x\xi) \, d\beta(\xi) = \langle \mu, f \rangle,$$

и предложение доказано.

Следствие 1. a) *Пусть f — функция на X/H' со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$, интегрируемая относительно μ/β'. Существует (μ/β)-пренебрежимое множество $N \subset X/H$, обладающее следующим свойством: если $x \in X$ таково, что $\pi(x) \notin N$, то функция $f \circ \omega_x$ на H/H', то есть функция $\dot\xi \longmapsto f(\pi'(x\xi))$, ин-*

тегрируема относительно β/β'; *интеграл* $\int\limits_{H/H'} f(\pi'(x\xi))\,d(\beta/\beta')(\dot{\xi})$ *зависит только от* $\dot{x}=\pi(x)$ *и является* (μ/β)-*интегрируемой функцией от* $\dot{x}$; *при этом справедливо равенство*

$$\int\limits_{X/H} \mathfrak{f}\,d(\mu/\beta') = \int\limits_{X/H} d(\mu/\beta)(\dot{x}) \int\limits_{H/H'} f(\pi'(x\xi))\,d(\beta/\beta')(\dot{\xi}).$$

b) *Пусть* f — *функция* $\geqslant 0$ *на* X/H', *измеримая относительно* μ/β' *и равная нулю вне счетного объединения* (μ/β')-*интегрируемых множеств. Тогда* $\pi(x) \mapsto \int\limits_{H/H'}^{*} f(\pi'(x\xi))\,d(\beta/\beta')(\dot{\xi})$ (μ/β)-*измеримо, и*

$$\int\limits_{X/H'}^{*} f\,d(\mu/\beta') = \int\limits_{X/H}^{*} d(\mu/\beta)(\dot{x}) \int\limits_{H/H'}^{*} f(\pi'(x\xi))\,d(\beta/\beta')(\dot{\xi}).$$

c) *Пусть* f — *функция на* X/H' *со значениями в банаховом пространстве или в* $\overline{\mathbf{R}}$, *измеримая относительно* μ/β' *и обращающаяся в нуль вне счетного объединения* (μ/β')-*интегрируемых множеств. Тогда для того, чтобы* f *была* (μ/β')-*интегрируемой, достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{X/H}^{*} d(\mu/\beta)(\dot{x}) \int\limits_{H/H'}^{*} |f(\pi'(x\xi))|\,d(\beta/\beta')(\dot{\xi}) < +\infty.$$

Следствие 2. *Пусть* G — *локально компактная группа, а* A *и* B — *ее замкнутые подгруппы, причем* $A \supset B$. *Предположим, что на однородном пространстве* G/B *левых классов по* B *существует ненулевая положительная мера* α, *инвариантная относительно* G *и ограниченная.*

a) *Канонический образ меры* α *на* G/A *есть ненулевая положительная мера, инвариантная относительно* G *и ограниченная.*

b) Δ_G *совпадает с* Δ_A *на* A *и с* Δ_B *на* B.

c) *На однородном пространстве* A/B *левых классов* A *по* B *существует ненулевая положительная мера, инвариантная относительно* A *и ограниченная.*

Утверждение a) очевидно. Утверждение b) вытекает из a) и следствия 2 теоремы 3. В силу b), Δ_A совпадает с Δ_B на B и, значит, можно применить результаты предыдущего n°, приняв

в них $X = G$, $H = A$, $H' = B$. Функция 1 на G/B α-интегрируема. Согласно утверждению а) следствия 1, функция 1 на A/B интегрируема относительно β/β', где β и β' означают левые меры Хаара на A и B; следовательно, β/β' ограничена.

9. *Построение меры Хаара группы, исходя из мер Хаара некоторых подгрупп*

Пусть G — локально компактная группа, а X и Y — такие ее замкнутые подгруппы, что $\Omega = XY$ *содержит окрестность* U *элемента* e. Тогда Ω открыто в G; в самом деле, для любых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ имеем $XY = (x_0X)(Yy_0) \supset x_0Uy_0$, а x_0Uy_0 — окрестность точки x_0y_0; следовательно, Ω есть окрестность каждой своей точки.

°Когда G есть группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то условие, наложенное на X и Y, удовлетворяется, если подалгебры, соответствующие X и Y, имеют своей суммой $\mathfrak{g}$.°

Группа $X \times Y$ действует непрерывно слева в G по закону $(x, y)\cdot s = xsy^{-1}$ $(x \in X,\ y \in Y,\ s \in G)$. Пусть $Z = X \cap Y$. Стабилизатором элемента e в $X \times Y$ служит подгруппа Z_0 группы $X \times Y$, составленная из пар (z, z), где $z \in Z$, канонически изоморфная Z. Следовательно, множество Ω отождествимо с однородным пространством левых классов $(X \times Y)/Z_0$; более точно, отображение $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ группы $X \times Y$ на Ω определяет факторизацией непрерывную биекцию $(X \times Y)Z_0$ на Ω. Будем предполагать, что это отображение *есть гомеоморфизм*. (Именно это имеет место, если G *счетно в бесконечности*; см. Приложение 1.)

Предложение 13. *Предположим, помимо того, что Z компактна. Пусть μ_G, μ_X, μ_Y — левые меры Хаара на G, X, Y и Λ — сужение Δ_G на Y. Тогда сужение μ меры μ_G на Ω есть, с точностью до постоянного множителя, образ меры $\mu_X \otimes (\Lambda^{-1}\cdot\mu_Y)$ при (совершенном) отображении $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ произведения $X \times Y$ на Ω.*

Для всех $x \in X$, $y \in Y$ имеем

$$\gamma((x, y))\mu = \delta(y)\gamma(x)\mu = \Delta_G(y)\mu.$$

Отождествляя Ω с однородным пространством $(X \times Y)/Z_0$ и выбирая надлежащим образом меру Хаара на Z_0, получаем, что $\mu^\#$

есть произведение левой меры Хаара группы $X \times Y$, а именно, $\mu_X \otimes \mu_Y$, на функцию $(x, y) \mapsto \Delta_G(y)^{-1}$ (лемма 6). С другой стороны, μ есть, с точностью до постоянного множителя, образ меры $\mu^{\#}$ при каноническом отображении $X \times Y$ на Ω (n° 3, замечание 2).

Следствие. *Пусть f — функция, определенная на Ω и принимающая значения в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы f была μ-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция $(x, y) \mapsto f(xy)\Delta_G(y)\Delta_Y(y)^{-1}$ была $(\mu_X \otimes \mu_Y)$-интегрируема; тогда*

$$\int_{\Omega} f(\omega)\, d\mu(\omega) = a \int_{X \times Y}\!\!\int f(xy)\, \Delta_G(y)\, \Delta_Y(y)^{-1}\, d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y), \tag{23}$$

где a — постоянная > 0, не зависящая от f.

Согласно только что доказанному предложению 13 и теореме 2 § 4 главы V, для того, чтобы f была μ-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция $(x, y) \mapsto f(xy^{-1})$ была интегрируема относительно меры $\mu_X \otimes (\Lambda^{-1} \cdot \mu_Y)$, или, еще, чтобы функция $(x, y) \mapsto f(xy^{-1})\Delta_G(y)^{-1}$ была интегрируема относительно меры $\mu_X \otimes \mu_Y$, или, еще, чтобы функция $(x, y) \mapsto f(xy)\Delta_G(y)\Delta_Y(y)^{-1}$ была интегрируема относительно меры $\mu_X \otimes \mu_Y$. Аналогичным рассуждением получается формула (23).

Предложение 14. *Предположим, что выполнены условия предложения 13 и что при этом Y — нормальный делитель.*

a) *Сужение меры μ_G на Ω есть, с точностью до постоянного множителя, образ меры $\mu_X \otimes \mu_Y$ при отображении $(x, y) \mapsto xy$ группы $X \times Y$ на Ω.*

b) *Для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем*

$$\Delta_G(xy) = \Delta_X(x)\Delta_Y(y)\operatorname{mod}(i_x),$$

где i_x означает автоморфизм $v \mapsto x^{-1}vx$ группы Y.

Так как $\Delta_G = \Delta_Y$ на Y (предложение 10b)), то a) следует из (23). Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Обозначим через p отображение $(x, y) \mapsto xy$ группы $X \times Y$ на Ω. Так как

$$xy\,(x_0y_0)^{-1} = xx_0^{-1}\,(x_0yy_0^{-1}x_0^{-1}) = xx_0^{-1}i_{x_0^{-1}}\,(yy_0^{-1}),$$

то

$$\Delta_G(x_0y_0)\,p(\mu_X \otimes \mu_Y) = \delta(x_0y_0)\,p(\mu_X \otimes \mu_Y) =$$
$$= p(\delta(x_0)\,\mu_X \otimes i_{x_0^{-1}}\delta(y_0)\,\mu_Y) =$$
$$= p(\Delta_X(x_0)\,\mu_X \otimes \Delta_Y(y_0)\,(\mathrm{mod}\, i_{x_0})\,\mu_Y) =$$
$$= \Delta_X(x_0)\,\Delta_Y(y_0)\,(\mathrm{mod}\, i_{x_0})\,p(\mu_X \otimes \mu_Y),$$

откуда следует b).

Замечание. Предложение 14 применимо, в частности, к случаю, когда G есть топологическое полупрямое произведение X на Y (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 10). В этом случае $Z = \{e\}$, а $\Omega = G$. Так как $yx = xi_x(y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, то μ_G тоже будет, с точностью до постоянного множителя, образом меры $(\mathrm{mod}\, i_x)\mu_X \otimes \mu_Y$ при отображении $(x, y) \longmapsto yx$ произведения $X \times Y$ в G.

10. *Интегрирование в фундаментальной области*

Пусть X — локально компактное пространство и H — *дискретная* группа, действующая справа непрерывно и *совершенно* в X. Пусть, далее, π — каноническое отображение X на X/H. Для каждого $x \in X$ обозначим через H_x стабилизатор элемента x в H; это — конечная подгруппа группы H (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4, предложение 4); пусть $n(x)$ означает ее порядок. Для каждого $s \in H$ имеем $H_{xs} = s^{-1}H_xs$ и, значит, $n(xs) = n(x)$. Существует такая открытая окрестность U точки x, что $U \cap Us = \varnothing$ для всех $s \notin H_x$ (там же, n° 4, доказательство предложения 8); для всех $y \in U$ имеем $H_y \subset H_x$; следовательно, функция n на X полунепрерывна сверху. Если X *счетно в бесконечности*, то H *счетно*; действительно, пусть $(K_1, K_2, \ldots)$ — покрытие пространства X последовательностью компактных подмножеств и $x_0 \in X$; множество тех $s \in H$, для которых $sx_0 \in K_i$, конечно (там же, теорема 1), откуда и следует наше утверждение.

Определение 2. *Пусть $F \subset X$. Говорят, что F есть фундаментальная область* (*относительно H*), *если сужение отображения π на F есть биекция F на X/H* (иначе говоря, если F есть *система представителей* для отношения эквивалентности, определяемого группой H).

Лемма 8. *Пусть F — фундаментальная область. Для любого $x \in X$ имеем*

$$\sum_{s \in H} \varphi_{Fs}(x) = n(x). \tag{24}$$

Так как $\varphi_{Fs}(xt) = \varphi_{Fst^{-1}}(x)$ при любых s и t из H, то обе части формулы (24) остаются неизменными при замене x на tx. Значит, можно предполагать, что $x \in F$. Тогда имеют место эквивалентности

$$\varphi_{Fs}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in Fs \Longleftrightarrow xs^{-1} \in F \Longleftrightarrow xs^{-1} = x \Longleftrightarrow s \in H_x,$$

откуда и следует (24).

Предложение 15. *Предположим, что X счетно в бесконечности. Пусть μ — мера $\geqslant 0$ на X. Пусть, далее, F — такая фундаментальная область, что Fs μ-измерима при любом $s \in H$. Пусть, наконец, f есть μ-интегрируемая функция на X со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Тогда семейство чисел $\int_{Fs} n(x)^{-1} f(x)\, d\mu(x)$ $(s \in H)$ суммируемо и*

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{s \in H} \int_{Fs} n(x^{-1}) f(x)\, d\mu(x).$$

Если A — конечное подмножество из H, то

$$\Big| \sum_{s \in A} n^{-1} f \varphi_{Fs} \Big| \leqslant n^{-1} |f| \sum_{s \in A} \varphi_{Fs} \leqslant |f|$$

в силу леммы 8. Лемма 8 показывает также, что $\sum_{s \in A} n^{-1} f \varphi_{Fs}$ сходится к f в смысле топологии простой сходимости по фильтрующемуся по возрастанию множеству конечных подмножеств из H. Тогда предложение 15 следует из теоремы 2 § 4 главы IV.

Теорема 4. *Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, H — дискретная группа, действующая справа непрерывно и совершенно в X, π — каноническое отображение X на X/H, μ — положительная мера на X, инвариантная относительно H, β — нормированная мера Хаара на H и $\lambda = \mu/\beta$. Пусть, далее, F есть μ-измеримая фундаментальная область.*

a) *Пара $(\pi, n^{-1}\varphi_F)$ μ-приспособлена и*

$$\int_X n(x)^{-1} \varphi_F(x)\, \varepsilon_{\pi(x)}\, d\mu(x) = \lambda.$$

b) *Отображение* π *является собственным для* $n^{-1}\varphi_F \cdot \mu$, *и* $\pi(n^{-1}\varphi_F \cdot \mu) = \lambda$.

c) *Пусть* k — *функция на* X/H. *Для того чтобы* k *была* λ-*измерима* (соотв. λ-*интегрируема*), *необходимо и достаточно, чтобы* $n^{-1}\varphi_F(k \circ \pi)$ *была* μ-*измерима* (соотв. μ-*интегрируема*); *и если* k λ-*интегрируема, то*

$$\int\limits_{X/H} k\, d\lambda = \int\limits_F n^{-1}(k \circ \pi)\, d\mu.$$

Имеем $\mu = \lambda^{\#}$. Пусть $f \in \mathscr{K}_+(X/H)$. Тогда $n^{-1}\varphi_F(f \circ \pi)$ μ-измерима, $\geqslant 0$ и, в силу предложения 5b),

$$\int\limits_X^* n(x)^{-1}\varphi_F(x) f(\pi(x))\, d\mu(x) = \int\limits_{X/H}^* f(\dot{x})\, d\lambda(\dot{x}) \int\limits_H^* n(x\xi)^{-1}\varphi_F(x\xi)\, d\beta(\xi),$$

а в силу леммы 8,

$$\int\limits_H^* n(x\xi)^{-1}\varphi_F(x\xi)\, d\beta(\xi) = n(x)^{-1} \sum_{\xi \in H} \varphi_F(x\xi) = 1.$$

Следовательно, $n^{-1}\varphi_F \cdot (f \circ \pi)$ μ-интегрируема и

$$\int\limits_X n(x)^{-1}\varphi_F(x) f(\pi(x))\, d\mu(x) = \int\limits_{X/H} f(\dot{x})\, d\lambda(\dot{x}).$$

Этим доказано a). Утверждение b) доказывается точно так же. Утверждение c) вытекает из b) и предложения 3 и теоремы 2 § 4 главы V.

Следствие. *В предположениях и обозначениях теоремы* 4, *пусть* F' *есть вторая* μ-*измеримая фундаментальная область. Пусть, далее,* $\boldsymbol{u}$ *есть функция на* X *со значениями в банаховом пространстве или в* $\overline{\mathbf{R}}$, *инвариантная относительно* H. *Предположим, что* $\boldsymbol{u}$ μ-*интегрируема на* F. *Тогда* $\boldsymbol{u}$ μ-*интегрируема на* F' *и*

$$\int\limits_F \boldsymbol{u}(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{F'} \boldsymbol{u}(x)\, d\mu(x).$$

Так как $\boldsymbol{u}$ и n инвариантны относительно H, то на X/H существует такая функция $\boldsymbol{v}$, что $\boldsymbol{v} \circ \pi$ совпадает с $n\boldsymbol{u}$ на F и на F'. Тогда $n^{-1}\varphi_F(\boldsymbol{v} \circ \pi) = \varphi_F \boldsymbol{u}$, $n^{-1}\varphi_{F'}(\boldsymbol{v} \circ \pi) = \varphi_{F'}\boldsymbol{u}$. По условию, $n^{-1}\varphi_F(\boldsymbol{v} \circ \pi)$ μ-интегрируема. В силу теоремы 4, $\boldsymbol{v}$ λ-интегрируема

$\varphi_{F'}u$ μ-интегрируема и

$$\int\limits_F u\,d\mu = \int\limits_{X/H} v\,d\lambda = \int\limits_{F'} u\,d\mu.$$

Относительно *существования* фундаментальных μ-измеримых областей см. упражнение 13.

Упражнения

1) Пусть G — локально компактная группа и H — ее замкнутая подгруппа. Для каждого $\xi \in H$ положим $\chi(\xi) = \Delta_H(\xi)\Delta_G(\xi)^{-1}$. Будем считать, что H действует в G как группа правых переносов. Показать, что на $\mathscr{K}^{\chi}(G)$ существует ненулевая положительная линейная форма I, и притом единственная с точностью до постоянного множителя, инвариантная относительно левых переносов. [Использовать предложение 3 с $X = G$, взяв в качестве μ левую меру Хаара на G.]

2) Пусть X и X' — локально компактные пространства, в которых действует справа непрерывно и совершенно локально компактная группа H. Пусть, далее, θ — совершенное непрерывное отображение X в X', согласующееся с тождественным отображением H в себя (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 4), и θ': $X/H \to X'/H$ — отображение, полученное из θ факторизацией. Пусть, наконец, f' — непрерывная функция на X', носитель которой имеет компактное пересечение с насыщением любого компактного подмножества. Тогда $f = f' \circ \theta$ обладает теми же свойствами на X и

$$f^{\flat} = f'^{\flat} \circ \theta'$$

(где отображения $f \mapsto f^{\flat}$, $f' \mapsto f'^{\flat}$ соответствуют выбору одной и той же меры Хаара на H).

3) Пусть B — локально компактное пространство и H — локально компактная группа. Положим $X = B \times H$, считая группу H действующей в X по закону

$$(b, \xi)\,\xi' = (b, \xi\xi').$$

Пусть λ — мера на $B = X/H$, а β — левая мера Хаара на H. Тогда $\lambda^{\#} = \lambda \otimes \beta$.

4) Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует справа непрерывно и совершенно локально компактная группа H. Пусть, далее, β — левая мера Хаара на H и μ — мера $\geqslant 0$ на X. Пусть, наконец, h — такая непрерывная функция $\geqslant 0$ на X, что $h^{\flat} = 1$. Если f — μ-пренебрежимая функция $\geqslant 0$ на X, то функция $(x, \xi) \mapsto f(x)\,h(x\xi)$ $(\mu \otimes \beta)$-пренебрежима на $X \times H$. [Существует такая убывающая последовательность открытых множеств Ω_1, Ω_2, ...,

что $\mu(\Omega_n)$ стремится к 0 и f равна нулю вне $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots$ Показать, что $\int^* \varphi_{\Omega_n}(x)\, h(x\xi)\, d\mu(x)\, d\beta(\xi) \leqslant \mu(\Omega_n)$, заметив, что функция $(x, \xi) \longmapsto \varphi_{\Omega_n}(x)\, h(x\xi)$ полунепрерывна снизу.]

5) Пусть G — локально компактная группа. Далее, пусть ψ_s для любого $s \in G$ есть автоморфизм аддитивной группы $\mathbf{R}$, определенный соотношением $\psi_s(x) = \Delta_G(s)\, x$. Пусть, наконец, Γ — топологическое полупрямое произведение групп G и $\mathbf{R}$, определяемое отображением $s \longmapsto \psi_s$ (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 10). Показать, что Γ унимодулярна.

6) Пусть G — локально компактная группа, а G_1, G_2, G_3 — ее замкнутые подгруппы такие, что $G_3 \subset G_1 \cap G_2$. Предположим, что G, G_1, G_2, G_3 унимодулярны и G_1/G_3 имеют конечную общую меру (для любой меры, инвариантной относительно G_1). Пусть λ, μ, ν — инвариантные меры на G/G_1, G/G_2, G_2/G_3, φ — каноническое отображение G на G/G_1 и $f \in \mathcal{K}(G/G_1)$. Показать, что

$$a \int_{G/G_1} f(u)\, d\lambda(u) = \int_{G/G_2} d\mu(\dot{x}) \int_{G_2/G_3} f(\varphi(x\xi))\, d\nu(\dot{\xi})$$

$(\dot{x} = xG_2,\ \dot{\xi} = \xi G_3)$, где a — константа, не зависящая от f

*7) a) Пусть E — локально компактное пространство и Γ — локально компактная группа, действующая слева непрерывно в E. Предположим, что для любого $x \in E$ отображение $s \longmapsto sx$ группы Γ в E совершенно и существует ненулевая ограниченная положительная мера μ на E, инвариантная относительно Γ. Тогда Γ компактна. [Пусть (s_n) — последовательность точек из Γ и K — компактное подмножество из E, не являющееся μ-пренебрежимым. Доказать, используя упражнение 17 § 4 главы IV, существование такого $x_0 \in E$, что $s_n x_0 \in K$ для бесконечного множества значений n. Вывести отсюда, что (s_n) имеет предельную точку в Γ. Затем применить упражнение 6 из Общ. топ., гл. II, 3-е изд., § 4.]

b) Пусть G — локально компактная группа, а H и K — ее замкнутые подгруппы. Предположим, что G и H унимодулярны, а мера на G/H, инвариантная относительно G, конечна. Показать, что для того, чтобы H и K удовлетворяли равносильным условиям упражнения 11в из Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4, необходимо и достаточно, чтобы K была компактна.

8) Пусть $\mathfrak{G}$ — локально компактная группа и G, H — ее замкнутые подгруппы. Допустим, что всякий элемент $s \in \mathfrak{G}$ единственным образом представим в виде $s = \xi x = y\eta$ $(\xi, \eta \in G,\ x, y \in H)$, причем ξ, x, y, η непрерывно зависят от s. Каждое $\xi \in G$ определяет гомеоморфизм $\hat{\xi}$ пространства H на себя, определяемый условием $\xi x \in \hat{\xi}(x)\, G$ $(x \in H)$. Каждое $x \in H$ определяет гомеоморфизм x пространства G на себя

определяемый условием $\xi x \in H\hat{x}(\xi)$ $(\xi \in G)$. Пусть μ, α, β — левые меры Хаара на $\mathfrak{G}$, G, H. Показать, что

$$d\hat{x}^{-1}(\alpha)(\xi) = \frac{\Delta_{\mathfrak{G}}(\hat{\xi}(x))\,\Delta_G(\hat{x}(\xi))}{\Delta_H(\hat{\xi}(x))\,\Delta_G(\xi)}\,d\alpha(\xi),$$

$$d\hat{\xi}^{-1}(\beta)(x) = \frac{\Delta_G(\hat{x}(\xi))}{\Delta_{\mathfrak{G}}(\hat{x}(\xi))}\,d\beta(x).$$

[Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Выразить тот факт, что интеграл $\int f(u)\,d\mu(u)$, вычисленный по формуле (23) как для $X = G$, $Y = H$, так и для $X = H$, $Y = G$, остается неизменным, если подвергнуть f левому переносу на элемент из G или на элемент из H.]

9) Пусть X — локально компактное пространство и H — *компактная* группа, действующая справа непрерывно (а значит, и совершенно) в X. Обозначим через β нормированную меру Хаара на H и через π: $X \longrightarrow X/H$ — каноническое отображение. Пусть λ — положительная мера на X/H, а $\lambda^{\#}$ — соответствующая мера на X.

a) Показать, что если N есть λ-пренебрежимое подмножество из X/H, то $\pi^{-1}(N)$ $\lambda^{\#}$-пренебрежимо. [Вычислить меру множества $\pi^{-1}(U)$, где U — открытое множество в X/H.]

b) Пусть p — конечное число $\geqslant 1$ и f — функция из $\mathscr{L}^p_F(X, \lambda^{\#})$ (где F — банахово пространство или $\overline{\mathbf{R}}$). Показать, что множество тех $x \in X$, для которых $\xi \longmapsto f(x\xi)$ не β-интегрируемо на H, имеет вид $\pi^{-1}(N)$, где N — λ-пренебрежимо. Кроме того, функция $f^{\flat}$ на X/H, определенная почти всюду (относительно λ) и такая, что $f^{\flat}(\pi(x)) = \int_H f(x\xi)\,d\beta(\xi)$, принадлежит $\mathscr{L}^p_F(X/H, \lambda)$, и $N_p(f^{\flat}) \leqslant N_p(f)$.

c) Обратно, если $g \in \mathscr{L}^p_F(X/H, \lambda)$, то функция $g \circ \pi$ принадлежит $\mathscr{L}^p_F(X, \lambda^{\#})$. Если p, q — сопряженные показатели, F' — сопряженное к F, $f \in \mathscr{L}^p_F(X, \lambda^{\#})$ и $g \in \mathscr{L}^q_{F'}(X/H, \lambda)$, то

$$\int_X \langle f(x), g(\pi(x))\rangle\,d\lambda^{\#}(x) = \int_{X/H} \langle f^{\flat}(z), g(z)\rangle\,d\lambda(z).$$

10) Пусть, в обозначениях n° 6 § 1, μ_α для любого $\alpha \in A$ означает левую меру Хаара на G_α, так что проективный предел мер μ_α будет мерой Хаара μ на G. Для любого $\alpha \in A$ обозначим через λ_α нормированную меру Хаара на K_α.

a) Пусть p — конечное число $\geqslant 1$ и f — функция из $\mathscr{L}_F^p(G, \mu)$ (где F — банахово пространство или $\overline{\mathbf{R}}$). Для каждого $\alpha \in A$ функция

$$f_\alpha(s) = \int_{K_\alpha} f(s\xi)\, d\lambda_\alpha(\xi),$$

определенная почти всюду относительно μ, принадлежит $\mathscr{L}_F^p(G, \mu)$ (упражнение 9). Показать, что f_α *сходится в среднем порядка* p к f по фильтрующемуся множеству A [использовать лемму 2 § 1].

b) Предположим, что $A = \mathbf{N}$ и $p = 1$. Показать, что тогда f_n стремится почти всюду (относительно μ) на G к f [использовать метод, аналогичный примененному в упражнении 16 § 8 главы V].

*11) Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа и λ — левая мера Хаара на G; предположим, что на G/H существует такая мера μ, инвариантная относительно G, что $\lambda = \mu^\#$ и $\mu(G/H) < +\infty$. Пусть ν — такая ненулевая положительная мера на G/H, что $\nu(G/H) < +\infty$. Пусть, наконец, h есть функция на G, обладающая свойствами, перечисленными в предложении 8.

a) Пусть A — борелевское подмножество из G/H. Показать, что

$$\int_G h(s)\, \nu(s^{-1}A)\, d\lambda(s) = \nu(G/H)\, \mu(A)$$

[использовать предложение 9a)].

b) Пусть A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — борелевские подмножества из G/H и $b_i = \sup\limits_{s \in G} \nu(s^{-1}A_i)$ для каждого i. Показать, что существуют такие два различных индекса i, j, что

$$\int_G h(s)\, \nu(s^{-1}A_i)\, \nu(s^{-1}A_j)\, d\lambda(s) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\nu(G/H))^2}{\mu(G/H)} \left(\left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \right)^2 - \frac{\mu(G/H)}{\nu(G/H)} \sum_{i=1}^n b_i \mu(A_i) \right)$$

[рассуждать как в упражнении 28a) § 1].

*12) a) Пусть X — топологическое пространство и $f: X \to \mathbf{N}$ — полунепрерывная сверху функция. Пусть, далее, X_0 есть множество всех точек из X, в которых f локально постоянна, и $Y_0 = X - X_0$. По индукции следующим образом определяются две последовательности $(X_i)_{i \geqslant 0}, (Y_i)_{i \geqslant 0}$ подмножеств из X: X_i есть множество тех точек из Y_{i-1}, где $f \mid Y_{i-1}$ локально постоянна, и $Y_i = Y_{i-1} - X_i$. Показать, что X_i есть всюду плотное открытое множество в Y_{i-1} и $\bigcap\limits_i Y_i = \varnothing$. [Показать, что $f(x) > i$ во всех точках из Y_i.]

b) Пусть X — множество, H — группа, действующая справа в X, π — каноническое отображение X на X/H и $\mathfrak{A}$ (соотв. $\mathfrak{B}$) — множество тех $A \subset X$, для которых $\pi \mid A: A \to X/H$ инъективно (соотв.

сюръективно). Пусть $(V_1, V_2, \ldots)$ — счетное покрытие множества X элементами из $\mathfrak{A}$ и

$$V'_i = V_i \cap \complement (V_1H \cup V_2H \cup \ldots \cup V_{i-1}H).$$

Показать, что $F = \bigcup\limits_{i \geqslant 0} V'_i \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

c) Пусть X — локально компактное пространство, H — счетная дискретная группа, действующая справа в X непрерывно и совершенно, π — каноническое отображение X на X/H и μ — мера $\geqslant 0$ на X. Показать, что если множества V_i пункта b) квадрируемы (гл. IV, § 5, упражнение 13d)), то множество F пункта b) есть квадрируемая фундаментальная область.

d) При сохранении предположений пункта c), будем пользоваться обозначениями H_x, $n(x)$ из n° 10. Элемент $x \in X$ называется *общим*, если в X существует такая его окрестность V, что $H_y = H_x$ для всех $y \in V$. Показать, что общие точки в X — те, в которых функция n локально постоянна. Показать, что общая точка допускает открытую окрестность, принадлежащую $\mathfrak{A}$ и квадрируемую [использовать упражнение 13d) § 5 главы IV].

e) Сохраняя предположения пункта c), предположим, сверх того, что X счетно в бесконечности. Показать, что если $X - X_0$ μ-пренебрежимо, то существует квадрируемая борелевская фундаментальная область F. [Применить конструкцию пункта a) к функции n. Затем применить результаты пунктов c) и d) в X_0. Точно так же рассуждать в каждом X_i.]

f) Пусть $U \in \mathfrak{B}$ есть открытое множество. Показать, что множество F пункта e) может быть наделено следующими дополнительными свойствами: 1) $F \subset U$; 2) для любого компактного подмножества K из X множество тех $s \in H$, для которых Fs пересекается с K, конечно.

13) Пусть G — компактная группа, μ — мера Хаара на G и u — такой эндоморфизм группы G, что $u(G)$ есть *открытая* подгруппа группы G, а ядро $u^{-1}(e)$ (обозначаемое G_u) — *конечная* подгруппа.

a) Показать, что существуют действительное число $h(u) > 0$ и открытая окрестность U элемента e в G такие, что для всякого открытого $V \subset U$ множество $u(V)$ открыто в G и $\mu(u(V)) = h(u)\mu(V)$ [см. § 1, следствие предложения 9].

b) Показать, что $h(u) = \mathrm{Card}(G/u(G))/\mathrm{Card}(G_u)$ [вычислить двумя способами $\mu(u(G))$, используя a) и предложение 10].

§ 3. Приложения и примеры

1. *Компактные группы линейных отображений*

Пусть E — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. Тогда $\mathrm{End}(E)$ есть конечномерная алгебра над $\mathbf{R}$, а каноническая топология в $\mathrm{End}(E)$ (§ 1, n° 10) есть топология компактной сходимости. Группа $\mathrm{Aut}(E) = \mathbf{GL}(E)$ есть открытое

подмножество из $\mathrm{End}(E)$ и, значит, локально компактна. Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — базис пространства E и для любого эндоморфизма u пространства E пусть $M(u) = (\alpha_{ij}(u))$ есть матрица эндоморфизма u относительно этого базиса; утверждение, что множество $S \subset \mathrm{End}(E)$ относительно компактно в $\mathrm{End}(E)$, равносильно утверждению, что функции $\alpha_{ij}(u)$ ограничены на S.

Предложение 1. *Пусть G — подгруппа группы* $\mathrm{Aut}(E)$. *Следующие три свойства равносильны*:

(I) *G относительно компактна в* $\mathrm{End}(E)$;

(II) *G относительно компактна в* $\mathrm{Aut}(E)$;

(III) *G оставляет инвариантной невырожденную положительную эрмитову форму на E.*

(III) $\Rightarrow$ (I): предположим, что G оставляет инвариантной невырожденную положительную эрмитову форму Ψ. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормальный базис относительно Ψ (Алг., гл. IX, § 6, следствие 1 теоремы 1). Пусть, далее, для любого $u \in G$ через (u_{ij}) обозначена его матрица относительно базиса (e_i). Каково бы ни было j, имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2=1$, и, следовательно, $|u_{ij}| \leqslant 1$ при любых i и j, чем и доказано (I).

(I) $\Rightarrow$ (II): это вытекает из следствия теоремы 4 Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 4, если принять во внимание, что топология $\mathrm{End}(E)$ есть топология компактной сходимости.

(II) $\Rightarrow$ (III): предположим, что замыкание $\overline{G}$ группы G в $\mathrm{Aut}(E)$ компактно. Пусть Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на E. Если телом скаляров служит $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то задание Φ превращает E в конечномерное гильбертово пространство, и условие (III) получается из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть F — гильбертово пространство, K — компактная группа и $s \longmapsto U(s)$ — ее представление в группу обратимых элементов из $\mathscr{L}(F; F)$, непрерывное в топологии простой сходимости. На F существует такая невырожденная положительная эрмитова форма φ, что $\varphi(U(s)x, U(s)y) = \varphi(x, y)$ при любых $s \in K$, $x \in F$, $y \in F$ и структура топологического векторного пространства в F, определяемая формой* φ (Топ. вект. простр., гл. V, § 1, n° 3), *совпадает с исходной структурой пространства F.*

Пусть α — мера Хаара на K. Каковы бы ни были x и y из F, отображение $s \mapsto (U(s)x \mid U(s)y)$ непрерывно. Положим

$$\varphi(x, y) = \int (U(s)x \mid U(s)y)\, d\alpha(s).$$

Очевидно, $\varphi(x, y)$ — полуторалинейная форма на F. А так как множество эндоморфизмов $U(s)$ компактно в $\mathcal{L}_s(F; F)$, то существует такая константа M, что $\|U(s)\| \leqslant M$ для всех $s \in K$. Следовательно, для всех $x \in F$ имеем

$$M^{-1}\|x\| \leqslant \|U(s)x\| \leqslant M\|x\|,$$

откуда вытекают неравенства

$$M^{-2}\alpha(K)\|x\|^2 \leqslant \varphi(x, x) \leqslant M^2\alpha(K)\|x\|^2,$$

показывающие, что φ невырожденна и положительна и что норма $\varphi(x, x)^{1/2}$ эквивалентна норме $\|x\|$. Наконец, для любого $t \in K$ имеем

$$\varphi(U(t)x, U(t)y) = \int (U(st)x \mid U(st)y)\, d\alpha(s) =$$

$$= \int (U(s)x \mid U(s)y)\, d\alpha(s) = \varphi(x, y).$$

Когда телом скаляров служит $\mathbf{H}$, рассуждаем точно так же, заменяя всюду функцию $s \mapsto (U(s)x \mid U(s)y)$ функцией $s \mapsto \Phi(sx, y)$, определенной на G и принимающей значения в $\mathbf{H}$. Тем самым лемма полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на E. Унитарная группа $\mathbf{U}(\Phi)$ замкнута в $\mathrm{Aut}(E)$, и, значит, компактна (предложение 1). Предложение 1 показывает также, что всякая компактная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(E)$ содержится в подгруппе вида $\mathbf{U}(\Phi)$. Если теперь $\mathbf{U}(\Phi)$ содержится в компактной подгруппе K группы $\mathrm{Aut}(E)$, то заключаем, что на E существует такая невырожденная положительная эрмитова форма Φ', что $\mathbf{U}(\Phi) \subset K \subset \mathbf{U}(\Phi')$, а отсюда легко вытекает (упражнение 1), что Φ и Φ' пропорциональны, откуда $\mathbf{U}(\Phi) = K$. Итак, максимальные компактные подгруппы группы $\mathrm{Aut}(E)$ — это подгруппы вида $\mathbf{U}(\Phi)$.

2. Тривиальность расслоенных пространств и расширений групп

Предложение 2. *Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует справа непрерывно и совершенно локально компактная группа H по закону $(x, \xi) \mapsto x\xi$. Предположим, что X/H паракомпактно. Пусть g — непрерывное представление H в $\mathbf{R}^n$. Тогда существует такое непрерывное отображение f пространства X в $\mathbf{R}^n$, что $f(x\xi) = f(x) + g(\xi)$ для любых $x \in X$ и $\xi \in H$.*

Вопрос сразу сводится к случаю $n = 1$. А так как аддитивная группа $\mathbf{R}$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbf{R}_+^*$, то предложение является тогда непосредственным следствием предложения 7 § 2.

Следствие. *Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует справа непрерывно и совершенно конечномерное действительное векторное пространство V по закону $(x, v) \mapsto xv$. Пусть, далее, π — каноническое отображение X на $B = X/V$. Предположим, что B паракомпактно.*

a) *Существует такое непрерывное отображение f пространства X в V, что $f(xv) = f(x) + v$ для любых $x \in X$ и $v \in V$.*

b) *Если f — отображение, удовлетворяющее условиям из* a), *то отображение $x \mapsto (\pi(x), f(x))$ есть гомеоморфизм X на $B \times V$.*

Утверждение a) следует из предложения 2, в котором в качестве g взято тождественное отображение V на себя. Пусть f — отображение, удовлетворяющее условиям из a). Отображение $x \mapsto x\cdot(-f(x))$ пространства X в X непрерывно и постоянно на каждой орбите, и, значит, имеет вид $\varphi \circ \pi$, где φ — непрерывное отображение пространства B в X; для каждого $b \in B$ имеем $\pi(\varphi(b)) = b$. Отображения $x \mapsto (\pi(x), f(x))$ пространства X в $B \times V$ и $(b, v) \mapsto \varphi(b)\cdot v$ пространства $B \times V$ в X взаимно обратны, поскольку

$$\varphi(\pi(x))\cdot f(x) = x\cdot(-f(x))\cdot(f(x)) = x, \quad \pi(\varphi(b)\cdot v) = \pi(\varphi(b)) = b,$$

и если $b = \pi(y)$, то $f(\varphi(\pi(y))\cdot v) = f(y\cdot(-f(y))\cdot v) = f(y) - f(y) + v = v$. А так как эти отображения непрерывны, то они — гомеоморфизмы.

Замечание. Пусть E — конечномерное действительное аффинное пространство, T — компактное пространство, μ — мера *с общей массой* 1 на T и f — непрерывное отображение T в E. Если выбрать в E некоторое начало a, то E окажется наделенным структурой векторного пространства, и, значит, интеграл $\int_T f(t)\,d\mu(t)$ имеет смысл; он представляет такую точку x из E, что

$$x-a=\int_T (f(t)-a)\,d\mu(t).$$

Эта точка не зависит от выбора a. Действительно, пусть $a'\in E$ и $x'\in E$ таковы, что $x'-a'=\int_T (f(t)-a')\,d\mu(t)$. Имеем

$$x'-a=(x'-a')+(a'-a)=$$
$$=\int_T (f(t)-a')\,d\mu(t)+\int_T (a'-a)\,d\mu(t)=\int_T (f(t)-a)\,d\mu(t)=x-a,$$

откуда $x'=x$. Следовательно, можно пользоваться символом $\int_T f(t)\,d\mu(t)$, не уточняя выбор начала в E. Если u — аффинное отображение пространства E в конечномерное аффинное пространство E', то

$$u\Big(\int_T f(t)\,d\mu(t)\Big)=\int_T u(f(t))\,d\mu(t).$$

В самом деле, можно отождествить E и E' с векторными пространствами так, чтобы u стало линейным отображением, а тогда формула известна (гл. III, § 4, предложение 4).

Лемма 2. *Пусть G — компактная группа, μ — нормированная мера Хаара на G, E — конечномерное аффинное пространство, A — аффинная группа пространства E и ρ — гомоморфизм группы G в A. Предположим, что для любого $x\in E$ отображение $x\mapsto\rho(s)x$ группы G в E непрерывно. Тогда для любого $x\in E$ точка*

$$x_0=\int_G \rho(s)\,x\,d\mu(s)\in E$$

инвариантна относительно G.

В самом деле, для любого $t \in G$ имеем

$$\rho(t)\,x_0 = \int_G \rho(t)\,\rho(s)\,x\,d\mu(s) = \int_G \rho(ts)\,x\,d\mu(s) =$$
$$= \int_G \rho(s)\,x\,d\mu(s) = x_0.$$

Предложение 3. *Пусть G — локально компактная группа, а H — ее замкнутый нормальный делитель, изоморфный $\mathbf{R}^n$ и такой, что G/H компактна.*

a) *Существует такая замкнутая подгруппа L группы G, что G есть топологическое полупрямое произведение L и H.*

b) *Если M — компактная подгруппа группы G, то существует такой элемент $x \in H$, что $x^{-1}Mx \subset L$.*

c) *Всякая компактная подгруппа группы G содержится в некоторой максимальной компактной подгруппе.*

d) *Максимальные компактные подгруппы группы G — не что иное, как образы подгруппы L при внутренних автоморфизмах группы G.*

Пусть π — канонический гомоморфизм группы G на $K = G/H$. Отображение $(s, h) \mapsto shs^{-1}$ произведения $G \times H$ в H определяет факторизацией такое непрерывное отображение $(\sigma, h) \mapsto \sigma \cdot h$ произведения $K \times H$ в H, что $shs^{-1} = \pi(s) \cdot h$. Мы отождествим H с $\mathbf{R}^n$ (и потому, в зависимости от рассматриваемого случая, будем пользоваться для группового закона в H мультипликативной или аддитивной записью). Согласно следствию предложения 2, существует такое непрерывное отображение f группы G в H, что $f(xh) = f(x) + h$ для всех $x \in G$, $h \in H$. Пусть $p(x) = x \cdot (-f(x))$ для каждого $x \in G$, что зависит лишь от класса элемента x по H. Положим

$$F(x, y) = p(xy)^{-1}\,p(x)\,p(y) = f(xy)\,y^{-1}x^{-1}x\,(-f(x))\,y\,(-f(y)) =$$
$$= f(xy)\,[y^{-1}(-f(x))\,y]\,(-f(y)) =$$
$$= f(xy) - \pi(y)^{-1} f(x) - f(y). \qquad (1)$$

Мы видим, что *если $F(x, y) = 0$ для любых x и y из G*, то $p(G) = L$ есть подгруппа группы G, пересекающаяся с каждым классом по H в одной и только одной точке. Так как p непрерывна,

то G есть тогда топологическое полупрямое произведение L и H (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 10).

Но при любых $h, h' \in H$ имеем

$$F(xh, yh') = f(xhyh') - \pi(y)^{-1} f(xh) - f(yh') =$$
$$= f(xhy) + h' - \pi(y)^{-1} f(x) - \pi(y)^{-1} h - f(y) - h' =$$
$$= f(xy(\pi(y)^{-1} h)) - \pi(y)^{-1} f(x) - f(y) - \pi(y^{-1}) h =$$
$$= f(xy) - \pi(y)^{-1} f(x) - f(y) = F(x, y).$$

Следовательно, F определяет факторизацией непрерывное отображение φ произведения $K \times K$ в H.

С другой стороны, для любых x, y, z из G имеем

$$F(z, xy) + F(x, y) =$$
$$= f(zxy) - \pi(xy)^{-1} f(z) - f(xy) + f(xy) - \pi(y)^{-1} f(x) - f(y) =$$
$$= \pi(y)^{-1} f(zx) - \pi(xy)^{-1} f(z) - \pi(y)^{-1} f(x) +$$
$$+ f(zxy) - \pi(y)^{-1} f(zx) - f(y) = \pi(y)^{-1} F(z, x) + F(zx, y),$$

и, значит, для любых x', y', z' из K имеем

$$-\varphi(x', y') = \varphi(z', x'y') - y'^{-1}\varphi(z', x') - \varphi(z'x', y').$$

Проинтегрируем обе части относительно z' по нормированной мере Хаара α группы K. Если положить $\psi(x') = \int \varphi(z', x')\, d\alpha(z')$, то ψ будет непрерывной функцией на K, и (замечая, что операции группы K в $\mathbf{R}^n$, согласно предложению 1 Общ. топ., гл. VII, § 2, не нарушают структуру векторного пространства в $\mathbf{R}^n$) мы получим

$$-\varphi(x', y') = \psi(x'y') - y'^{-1}\psi(x') - \psi(y').$$

Иными словами, полагая $k = \psi \circ \pi$, что является непрерывной функцией на G, имеем

$$-F(x, y) = k(xy) - \pi(y)^{-1}k(x) - k(y). \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что если заменить f непрерывной функцией $f + k$ (что не нарушает свойства $f(xh) = f(x) + h$), то F заменится на 0, а это, как показано выше, завершает доказательство утверждения a).

Пусть l_g (соотв. h_g) для любого $g \in G$ есть однозначно определенный элемент из L (соотв. H), такой, что $g = h_g l_g$.

Если $h_1 \in H$ и $g \in G$, то

$$gh_1 = h_g l_g h_1 = h_g (l_g h_1 l_g^{-1}) l_g,$$

и, значит, $h_g = h_{gh_1} + l_g h_1 l_g^{-1}$. Пусть ψ_g для любого $g \in G$ означает отображение H в себя, определяемое формулой

$$\psi_g (h_1) = h_g + l_g h_1 l_g^{-1}.$$

Отображение $(g, h_1) \mapsto \psi_g(h_1)$ произведения $G \times H$ в H непрерывно и превращает H в однородное относительно G пространство, в котором стабилизатором начала служит L. Кроме того, заметим, что ψ_g при отождествлении H с $\mathbf{R}^n$ становится *аффинным* отображением H в себя. Пусть теперь M — компактная подгруппа группы G; согласно лемме 2, существует такое $x \in H$, что $\psi_m(x) = x$ для *всех* $m \in M$. Для $y \in H$ отображение ψ_y есть перенос на вектор y; отсюда вытекает, что для любого $m \in M$ отображение $\psi_{x^{-1}} \circ \psi_m \circ \psi_x$ переводит начало H в себя, и, значит, $x^{-1}mx \in L$. Этим доказано, что $x^{-1}Mx \subset L$, откуда следует b).

Пусть L' — замкнутая подгруппа группы G, содержащая L. Тогда L' есть топологическое полупрямое произведение L и $L' \cap H$. Если L' компактно, то $L' \cap H$ компактно и, значит, сводится к точке (Общ. топ., гл. VII, § 1, следствие 1 теоремы 2), так что $L' = L$. Этим доказано, что L есть максимальная компактная подгруппа группы G; следовательно, то же самое верно для подгрупп, получаемых из L при внутренних автоморфизмах группы G. Тогда утверждения c) и d) предложения 3 непосредственно следуют из b).

Предложение 4. *Пусть G — локально компактная группа и H — такой ее замкнутый нормальный делитель, что группа $K = G/H$ компактна. Тогда всякое непрерывное представление u группы H в $\mathbf{R}$, такое, что $u(s\xi s^{-1}) = u(\xi)$, каковы бы ни были $\xi \in H$ и $s \in G$, может быть продолжено до непрерывного представления группы G в $\mathbf{R}$.*

Пусть $L = G \times \mathbf{R}$ и M — множество, образованное точками $(\xi, -u(\xi))$, где ξ пробегает H. Ясно, что M есть замкнутый нормальный делитель группы L. Пусть $L' = L/M$ и π — каноническое отображение L на L'. Подгруппа группы L, порожденная M и $\mathbf{R}$, совпадает с $H \times \mathbf{R}$ и, следовательно, замкнута; поэтому $\pi(\mathbf{R})$ есть замкнутая подгруппа N группы L'. Сужение ρ отображения

π на $\mathbf{R}$ есть биективное непрерывное представление $\mathbf{R}$ на N. Лемма 2 Приложения 1 показывает, что ρ взаимно непрерывно. При этом L'/N изоморфно

$$L/(H\times\mathbf{R}) = G/H$$

и, значит, компактно. В силу предложения 3 и того факта, что N содержится в центре L', L' есть произведение N и некоторой другой подгруппы. Следовательно, существует непрерывное представление группы L' на N, которое сводится на N к тождественному отображению. Таким образом, существует непрерывное представление v группы L на $\mathbf{R}$, которое тривиально на M и сводится к тождественному отображению на $\mathbf{R}$. Для всех $\xi \in H$ имеем $v((\xi,\ 0)) = v((\xi,\ -u(\xi)(e,\ u(\xi))) = u(\xi)$, что и завершает доказательство.

Лемма 3. *Пусть G — топологическая группа, порождаемая компактной окрестностью элемента e. Пусть, далее, H — такая замкнутая подгруппа группы G, что однородное пространство G/H компактно. Тогда H порождается компактной окрестностью элемента e в H.*

Пусть C — такое компактное множество, что $G = CH$. Можно, увеличив, если нужно, C, считать, что C порождает G и $G = \mathring{C}H$. Тогда C^2 компактно и покрыто открытыми множествами $\mathring{C}s$ $(s \in H)$. Следовательно, в H существуют такие $s_1, \ldots, s_n$, что $C^2 \subset \mathring{C}s_1 \cup \ldots \cup \mathring{C}s_n$. Пусть Γ есть подгруппа группы H, порожденная элементами s_i. Имеем $C^2 \subset C\Gamma$. Отсюда по индукции выводим, что $C^n \subset C\Gamma$ для любого n, и, значит, $G = C\Gamma$. Всякий элемент из H представим в виде ab, где $a \in C$, $b \in \Gamma$; отсюда $a \in H$, и, значит, $a \in C \cap H$. Таким образом, H порождается множеством $C \cap H$ с присоединенными к нему элементами s_i, то есть компактным множеством.

Лемма 4. *Пусть G — связная топологическая группа и D — ее вполне несвязный нормальный делитель. Тогда D содержится в центре группы G.*

В самом деле, пусть $d \in D$. Образ G при непрерывном отображении $x \mapsto xdx^{-1}$ есть связное подмножество из D и, значит, сводится к $\{d\}$, чем доказано, что $xd = dx$ для любого $x \in G$.

13*

Предложение 5. *Пусть G — связная топологическая группа, обладающая таким дискретным нормальным делителем D, что группа $K = G/D$ компактна, а коммутант группы K плотен в K. Тогда D конечен, а G компактна.*

Группа G локально изоморфна K (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, предложение 19) и, значит, локально компактна; а будучи связной, она порождается компактной окрестностью элемента e. Согласно леммам 3 и 4, D есть коммутативная группа конечного типа и, стало быть, изоморфна группе $\mathbf{Z}^r \times D_1$ с конечным D_1 (Алг., гл. VII, § 4, теорема 3). Предположим, что $r > 0$. Тогда существует представление f группы D *на* $\mathbf{Z}$. В силу предложения 4, f продолжается до непрерывного представления g группы G в $\mathbf{R}$. Факторизацией g определяет непрерывное представление g' группы K в $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$; а так как $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ коммутативна, то ядро отображения g' содержит коммутант группы K, и, значит, g' тривиально; иными словами, $g(G) \subset \mathbf{Z}$. Но поскольку G связна, отсюда вытекает, что $g(G) = \{0\}$, чего не может быть, поскольку $f(D) = \mathbf{Z}$. Следовательно, $r = 0$ и D конечно. Таким образом, группа G компактна (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 4, следствие 2 предложения 2).

3. *Примеры*

В этом n° (за исключением примеров 7 и 8) *K означает недискретное локально компактное поле, а dx — меру Хаара на его аддитивной группе.*

Напомним, что $\operatorname{mod} x = |x|$, если $K = \mathbf{R}$, $\operatorname{mod} x = |x|^2$, если $K = \mathbf{C}$, и $\operatorname{mod} x = |x|_p$, если $K = \mathbf{Q}_p$.

Пример 1. *Линейная группа.*

Пусть A есть алгебра $\mathbf{M}_n(K)$. Группа A^* всех обратимых элементов из A есть не что иное, как линейная группа $\mathbf{GL}(n, K)$. Приведенной нормой $\mathrm{Nrd}_{A/K}(X)$ каждого $X \in A$ служит $\det X$; следовательно, $N_{A/K}(X) = (\det X)^n$ (Алг., гл. VIII, § 12, предложение 8). А так как $X \mapsto {}^tX$ есть изоморфизм алгебры A на противоположную алгебру, то

$$N_{A^\circ/K}(X) = N_{A/K}({}^tX) = \det({}^tX)^n = (\det X)^n.$$

Тогда предложение 16 § 1 показывает, что

$$\operatorname{mod}(\det X)^{-n}\cdot\bigotimes_{i,j} dx_{ij} \qquad (X=(x_{ij})) \tag{3}$$

есть левая и правая мера Хаара на $\mathrm{GL}(n, K)$.

Для того чтобы найти все относительно инвариантные меры на $\mathrm{GL}(n, K)$ нам понадобится следующая лемма:

Лемма 5. *Непрерывные представления группы* $\mathrm{GL}(n, K)$ *в* $\mathbf{C}^*$ *суть отображения вида* $X \mapsto \chi(\det X)$, *где* χ — *непрерывное представление* K^* *в* $\mathbf{C}^*$.

Такое отображение, очевидно, есть непрерывное представление группы $\mathrm{CL}(n, K)$ в $\mathbf{C}^*$. Обратно, пусть ψ — непрерывное представление $\mathrm{GL}(n, K)$ в $\mathbf{C}^*$. Для каждого $x \in K^*$ положим

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix} x & & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & 0 & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

и $\chi(x)=\psi(\tilde{x})$. Тогда для любой матрицы $X \in \mathrm{GL}(n, K)$ имеем $(\det X^{-1})^{\sim}\cdot X \in \mathrm{SL}(n, K)$. Так как $\mathrm{SL}(n, K)$ есть коммутант группы $\mathrm{GL}(n, K)$ (Алг., гл. III, 3-е изд.), то $\psi((\det X^{-1})^{\sim}\cdot X)=1$, откуда

$$\psi(X)=\psi((\det X)^{\sim})=\chi(\det X).$$

После этого следствие 1 предложения 10 § 1 показывает, что относительно инвариантные меры на $\mathrm{GL}(n, K)$ — это, с точностью до постоянного множителя, меры вида

$$\chi(\det X)\cdot\bigotimes_{i,j} dx_{ij} \qquad (X=(x_{ij})), \tag{4}$$

где χ — непрерывное представление K^* в $\mathbf{C}^*$.

Пример 2. *Аффинная группа.*

Пусть (X, x) для каждого $X \in \mathrm{GL}(n, K)$ и каждого $x \in K^n$ означает аффинное отображение $\xi \mapsto X\xi + x$ K^n в себя. Множество всех (X, x) есть аффинная группа G пространства K^n (Алг., гл. II, 3-е изд., § 9, n° 4). Множество T всех переносов есть ее замкнутый нормальный делитель, канонически изоморфный K^n; с

другой стороны, $\mathrm{GL}(n, K)$ есть замкнутая подгруппа группы G, и G является полупрямым произведением $\mathrm{GL}(n, K)$ и $T = K^n$. Наделим G (локально компактной) топологией, в которой G будет топологическим полупрямым произведением $\mathrm{GL}(n, K)$ и T (Общ. топ., гл. III, § 2, n° 10). Тогда

$$(X, x) = (1, x)\cdot(X, 0).$$

С другой стороны, если $X \in \mathrm{GL}(n, K)$ и $x \in T$, то для любого $\xi \in K^n$ имеем

$$(X, 0)(1, x)(X, 0)^{-1}\xi = X(X^{-1}\xi + x) = \xi + Xx = (1, Xx)\xi,$$

и, следовательно, автоморфизм $(1, x) \mapsto (X, 0)(1, x)(X, 0)^{-1}$ группы T имеет в качестве модуля $\operatorname{mod}\det(X)$ (§ 1, предложение 15). Учитывая пример 1 и замечание в n° 9 § 2, получаем, что

$$\operatorname{mod}(\det X)^{-n-1}\cdot(\bigotimes_{i, j} dx_{ij}) \otimes (\bigotimes_{i} dx_i) \qquad (X = (x_{ij}),\ x = (x_i)) \tag{5}$$

есть левая мера Хаара на G. С другой стороны, в силу предложения 14 § 2,

$$\Delta_G((X, x)) = \Delta_{\mathrm{GL}(n, K)}(X)\,\Delta_{K^n}(x)\,(\operatorname{mod}\det X)^{-1},$$

или

$$\Delta_G((X, x)) = \operatorname{mod}(\det X^{-1}). \tag{6}$$

Следовательно,

$$(\operatorname{mod}\det X)^{-n}\cdot(\bigotimes_{i,j} dx_{ij}) \otimes (\bigotimes_{i} dx_i) \tag{7}$$

есть правая мера Хаара на G.

П р и м е р 3. *Строгая треугольная группа.*

Пусть $[1, n]$ — множество всех целых m, таких, что $1 \leqslant m \leqslant n$. Пусть, далее, J — подмножество из $[1, n] \times [1, n]$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $(i, j) \in J$, то $i < j$;

2) если $(i, j) \notin J$, то для любого целого k, удовлетворяющего неравенствам $i < k < j$, хотя бы одна из пар (i, k) и (k, j) не принадлежит J.

Пусть T_J — множество всех матриц $Z = (z_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant n}$ с элементами из K, у которых $z_{ii} = 1$ и $z_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $(i, j) \notin J$. Это — замкнутое подмножество из $\mathrm{GL}(n, K)$. Отображение $Z \mapsto (z_{ij})_{i, j\in J}$ есть гомеоморфизм T_J на K^s (где s означает число элементов

множества J). Если $Z' = (z'_{ij}) \in T_J$, то $Z'Z = (z''_{ij})$, где

$$z''_{ij} = z_{ij} + z'_{ij} + \sum_{i<h<j} z'_{ih} z_{hj} \text{ для } i < j,$$
$$z''_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad i > j, \; z''_{ii} = 1,$$

откуда $Z'Z \in T_J$. Если отождествить T_J с K^s, то отображение $Z \mapsto Z'Z$ (с фиксированным Z') отождествится с некоторым аффинным отображением, и его определитель будет равен 1, в чем можно убедиться, упорядочив лексикографически пары $(i, j) \in J$ и применив следующую лемму:

Лемма 6. *Пусть L — совершенно упорядоченное конечное множество. Пусть, далее, V_λ для любого $\lambda \in L$ есть свободный модуль конечной размерности над коммутативным кольцом k. Наконец, пусть $f_{\lambda\mu} \in \mathrm{Hom}_k(V_\mu, V_\lambda)$ для любых λ, μ из L, таких, что $\lambda \leqslant \mu$. Тогда линейное отображение*

$$(v_\lambda)_{\lambda \in L} \mapsto \Big(\sum_{\mu > \lambda} f_{\lambda\mu}(v_\mu)\Big)_{\lambda \in L}$$

произведения $\prod_{\lambda \in L} V_\lambda$ в себя имеет в качестве определителя $\prod_{\lambda \in L} \det f_{\lambda\lambda}$.

Все сразу сводится к случаю, когда L — интервал из целых чисел, а тогда лемма вытекает из результатов главы III Алгебры.

Если $Z \in T_J$, то существует такое $Z' \in T_J$, что $Z'Z = I_n$, откуда $Z' = Z^{-1}$. Таким образом, T_J есть замкнутая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$. С другой стороны, предложение 15 § 1 показывает, что

$$\bigotimes_{(i,j) \in J} dz_{ij}$$

есть левая мера Хаара на T_J. Вычисляя ZZ', таким же образом убеждаемся в том, что эта мера есть правая мера Хаара на T_J.

Аналогичный результат получится, если в определении T_J поменять ролями строки и столбцы.

В случае, когда J есть множество всех пар (i, j), в которых $i < j$, группа T_J называется *верхней строго треугольной группой* порядка n над K и обозначается $T_1(n, K)$. Группа транспонированных матриц называется *нижней строго треугольной группой*.

Пример 4. *Расширенная треугольная группа.*

Пусть $n_1, \ldots, n_r$ — целые числа $\geqslant 1$. Положим $p_k = n_1 + \ldots + n_{k-1}$ и $n = p_{r+1} = n_1 + \ldots + n_r$. Пусть I_k —

множество всех целых j, таких, что $p_k < j \leqslant p_{k+1}$, и J — объединение всех множеств $I_k \times I_l$ $(k < l)$. Пусть, далее, G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{GL}(n, K)$, элементами которой служат всевозможные матрицы $(Z_{kl})_{1\leq k\leq r,\ 1\leq l\leq r}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждая Z_{kl} есть матрица $(z_{ij})_{i\in I_k,\ j\in I_l}$ с элементами из K, составленная из n_k строк и n_l столбцов;

2) $Z_{kl}=0$, если $k>l$;

3) $Z_{kk}\in \mathbf{GL}(n_k, K)$, если $1\leqslant k\leqslant r$.

Формула поклеточного умножения

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Z_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_{12} & \dots & Z_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & Z_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{11}Z_{12} & \dots & Z_{11}Z_{1r} \\ 0 & Z_{22} & \dots & Z_{22}Z_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Z_{rr} \end{pmatrix} \tag{8}$$

показывает, что G есть топологическое полупрямое произведение подгруппы D тех элементов $(Z_{kl})\in G$, у которых $Z_{kl}=0$ при $k\neq l$, и подгруппы T_J примера 3. При этом D изоморфно прямому произведению групп $\mathbf{GL}(n_k, K)$ $(1\leqslant k\leqslant r)$.

Пусть J' — множество всех пар (j, i), для которых $(i, j)\in J$, и H — множество всех пар $(i, j)\in[1, n]\times[1, n]$, не принадлежащих J'. Пусть, далее, $Z'=(z_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ есть элемент из G. Согласно предложению 14 § 2 и приведенным выше примерам 1 и 3, получим левую меру Хаара на G, если возьмем образ меры

$$\bigotimes_{k=1}^{r}\Big((\operatorname{mod}\det Z_{kk})^{-n_k}\cdot \bigotimes_{i,\,j\in I_k} dz_{ij}\Big)\otimes\Big(\bigotimes_{(i,\,j)\in J} dz_{ij}\Big)$$

при отображении

$$((Z_{kk}),\ (Z_{kl}))\mapsto \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{11}Z_{12} & \dots & Z_{11}Z_{1r} \\ 0 & Z_{22} & \dots & Z_{22}Z_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & Z_{rr} \end{pmatrix}.$$

Для этого рассмотрим, при $k<l$, векторное пространство всех матриц $Z_{kl}=(z_{ij})_{i\in I_k,\ j\in I_l}$. Оно представляет собой прямую сумму n_l подпространств M_j $(j\in I_l)$, образованных матрицами, у которых $z_{ih}=0$ при $h\neq j$. Каждое из этих подпространств M_j устойчиво при отображении $Z_{kl}\mapsto Z_{kk}Z_{kl}$, а сужение этого отображения

на M_j имеет своей матрицей Z_{kk}. Следовательно (§ 1, предложение 15), образом меры $\bigotimes_{i\in I_k,\, j\in I_l} dz_{ij}$ при отображении $Z_{kl} \mapsto Z_{kk}Z_{kl}$ служит

$$(\operatorname{mod}\det Z_{kk})^{-n_l}\cdot \bigotimes_{i\in I_k,\, j\in I_l} dz_{ij}.$$

Значит, левой мерой Хаара на G будет

$$\prod_{k=1}^{r} (\operatorname{mod}\det Z_{kk})^{-q_k}\cdot \bigotimes_{(i,\,j)\in H} dz_{ij}, \tag{9}$$

где $q_k = \sum_{k\leqslant l\leqslant r} n_l = n - p_k$.

Вычислим *модуль* группы G, воспользовавшись еще предложением 14 § 2. Группы D и T_J унимодулярны; с другой стороны,

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Z_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & Z_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_{12} & \ldots & Z_{1r} \\ 0 & 1 & \ldots & Z_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Z_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & Z_{rr} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & Z'_{12} & \ldots & Z'_{1r} \\ 0 & 1 & \ldots & Z'_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где $Z'_{kl} = Z_{kk}Z_{kl}Z_{ll}^{-1}$. Принимая во внимание пример 3 и предложение 15 § 1, получаем, рассуждая как выше, что, если $X = \operatorname{diag}(Z_{11}, \ldots, Z_{rr}) \in D$, модуль автоморфизма $Z \mapsto X^{-1}ZX$ группы T_J есть

$$\prod_{k<l} (\operatorname{mod}\det Z_{kk})^{-n_l} (\operatorname{mod}\det Z_{ll})^{n_k},$$

и, следовательно,

$$\Delta_G(Z) = \prod_{k=1}^{r} (\operatorname{mod}\det Z_{kk})^{n+n_k-2q_k}. \tag{10}$$

Группа G' транспонированных матриц исследуется тем же способом. Находим в качестве левой меры Хаара

$$\prod_{k=1}^{r} (\operatorname{mod}\det Z_{kk})^{-p_{k+1}} \bigotimes_{(j,\,i)\in H} dz_{ij},$$

а в качестве модуля группы G'

$$\prod_{k=1}^{r} (\operatorname{mod} \det Z_{kk})^{n+n_k-2p_{k+1}}.$$

Если, в частности, взять $n_1 = \ldots = n_r = 1$, то группой G окажется группа $T(n, K)^*$ всех обратимых элементов подалгебры алгебры $\mathrm{M}_n(K)$, состоящей из тех матриц $X = (x_{ij})$, у которых $x_{ij} = 0$ для $i > j$. Эта алгебра, которую мы обозначим $T(n, K)$, называется *верхней треугольной алгеброй*, а группа $T(n, K)^*$ — *верхней расширенной треугольной группой* порядка n над K. Тогда предыдущие формулы принимают такой вид: левой мерой Хаара на $T(n, K)^*$ будет

$$\prod_{i=1}^{n} (\operatorname{mod} z_{ii})^{i-n-1} \cdot \bigotimes_{i \leqslant j} dz_{ij} \quad (Z = (z_{ij})), \tag{9 bis}$$

а модуль группы $T(n, K)^*$ равен

$$\Delta_{T(n, K)^*}(Z) = \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{mod} z_{ii})^{2i-n-1} \quad (Z = (z_{ij})). \tag{10 bis}$$

Для группы транспонированных матриц или *нижней расширенной треугольной группы* находим в качестве левой меры Хаара

$$\prod_{i=1}^{n} (\operatorname{mod} z_{ii})^{-i} \cdot \bigotimes_{i \geqslant j} dz_{ij},$$

а в качестве модуля

$$\prod_{i=1}^{n} (\operatorname{mod} z_{ii})^{n+1-2i}.$$

Замечание. $T(n, K)^*$ есть замкнутая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$ и

$$\Delta_{T(n, K)^*}((z_{ij})) = \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{mod} z_{ii})^{2i-n-1}.$$

В примере 1 мы показали, что $\Delta_{\mathrm{GL}(n, K)} = 1$. При $n > 1$ функция

$$\Delta_{\mathrm{GL}(n, K)}/\Delta_{T(n, K)^*}$$

на $T(n, K)^*$ не может быть продолжена до непрерывного представления группы G в $\mathbf{C}^*$ (ибо такое представление, согласно лемме 5, равно 1 на $\mathbf{SL}(n, K)$, тогда как $\operatorname{mod}(z_{11})^{1-n} \neq 1$ для надлежащим образом выбранного z_{11}). Отсюда следует, что при $n > 1$ однородное пространство $\mathrm{GL}(n, K)/T(n, K)^*$ не имеет *ни одной относительно инвариантной меры* (§ 2, теорема 3).

Это однородное пространство при $n = 2$ отождествимо с *проективной прямой* над K. Действительно, пусть (e_1, e_2) — канонический базис пространства K^2. Группа $\mathbf{GL}(2, K)$ действует транзитивно на множестве всех прямых на K^2 с удаленным началом 0, и стабилизатором для $Ke_1 - \{0\}$ служит $T(2, K)^*$.

Пример 5. *Специальная треугольная группа.*

Вернемся к обозначениям начала примера 4 и рассмотрим подгруппу $G_1 = G \cap \mathbf{SL}(n, K)$. Она является топологическим полупрямым произведением групп $D_1 = D \cap \mathbf{SL}(n, K)$ и T_J. Группа D_1 обладает нормальным делителем A, изоморфным $\mathbf{SL}(n_r, K)$, а именно, подгруппой, составленной из всех элементов $\operatorname{diag}(Z_{kk})$ с $Z_{kk} = 1$ для $k < r$. Гомоморфизм

$$\varphi\colon \operatorname{diag}(Z_{11}, \ldots, Z_{rr}) \mapsto (Z_{11}, \ldots, Z_{r-1,\, r-1})$$

группы D_1 в $\mathbf{GL}(n_1, K) \times \ldots \times \mathbf{GL}(n_{r-1}, K)$ сюръективен и имеет своим ядром A. С другой стороны, φ непрерывно. Принимая во внимание лемму 2 Приложения 1, можно отождествить D_1/A с

$$\mathbf{GL}(n_1, K) \times \ldots \times \mathbf{GL}(n_{r-1}, K).$$

Обозначим через μ меру Хаара на A (см. пример 6), а через

$$\alpha = \bigotimes_{k=1}^{r-1} ((\operatorname{mod} \det Z_{kk})^{-n_k} \cdot \bigotimes_{i,\, j \in I_k} dz_{ij}) \otimes' (d\mu(Z_{rr}))$$

меру Хаара на D_1, для которой

$$\alpha/\mu = \bigotimes_{k=1}^{r-1} (\operatorname{mod} \det Z_{kk})^{-n_k} \cdot \bigotimes_{i,\, j \in I_k} dz_{ij}$$

(§ 2, предложение 10). Тогда, как в примере 4, можно показать, что

$$\operatorname{mod} \Big(\prod_{k=1}^{r-1} (\det Z_{kk})^{n_k - q_k}\Big) \times$$
$$\times \Big[\bigotimes_{k=1}^{r-1} ((\operatorname{mod} \det Z_{kk})^{-n_k} \cdot \bigotimes_{i,\, j \in I_k} dz_{ij}) \otimes' d\mu(Z_{rr})\Big] \otimes \bigotimes_{(i,\, j) \in J} dz_{ij}$$

будет левой мерой Хаара на G_1. Так как G_1 — нормальный делитель группы G, то *модуль* группы G_1 есть сужение модуля группы G (§ 2, предложение 10b)).

При $n_r = 1$ подгруппа A сводится к нейтральному элементу, и левой мерой Хаара на G будет

$$\operatorname{mod}\left(\prod_{k=1}^{r-1} (\det Z_{kk})^{-q_k}\right) \cdot \bigotimes_{k=1}^{r-1} \left(\bigotimes_{i,\, j \in I_k} dz_{ij}\right) \otimes \bigotimes_{(i,\, j) \in J} dz_{ij}.$$

Группа G_1, получающаяся при $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 1$, называется *верхней специальной треугольной группой*, а группа G_1' транспонированных матриц — *нижней специальной треугольной группой*. Левой мерой Хаара на G_1 служит

$$\operatorname{mod}\left(\prod_{i=1}^{r-1} z_{ii}^{i-n-1}\right) \cdot \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} dz_{ii}\right) \otimes \left(\bigotimes_{1 \leq i < j \leq n} dz_{ij}\right), \tag{11}$$

а модуль группы G_1 равен

$$\operatorname{mod}\left(\prod_{i=1}^{n-1} z_{ii}^{2i-2n}\right). \tag{12}$$

Точно так же в качестве левой меры Хаара на G_1' получаем

$$\operatorname{mod}\left(\prod_{i=1}^{n-1} z_{ii}^{n-1-i}\right) \cdot \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} dz_{ii}\right) \otimes \left(\bigotimes_{1 \leq j < i \leq n} dz_{ij}\right),$$

а в качестве модуля

$$\operatorname{mod}\left(\prod_{i=1}^{n-1} z_{ii}^{2n-2i}\right).$$

П р и м е р 6. *Специальная линейная группа.*

Замкнутые подгруппы $T_1(n, K)$ и ${}^t(T(n, K)^*)$ группы $\mathbf{GL}(n, K)$ имеют своим пересечением $\{e\}$. Следовательно, отображение $(M, N) \longmapsto M \cdot N$ есть непрерывная биекция φ произведения $T_1(n, K) \times {}^t(T(n, K)^*)$ на некоторое подмножество Ω из $\mathbf{GL}(n, K)$.

Лемма 7. a) *Пусть* $U = (u_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, K)$. *Для того чтобы* $U \in \Omega$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\det (u_{ij})_{k \leq i,\, j \leq n} \neq 0$ *для* $k = 2, 3, \ldots, n$.

b) Ω *есть открытое множество в* $\mathbf{GL}(n, K)$.

c) *Отображение* φ *есть гомеоморфизм* $T_1(n, K) \times {}^t(T(n, K)^*)$ *на* Ω.

Для того чтобы $U \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое

$$Z = (z_{ij}) \in T_1(n, K),$$

что $ZU \in {}^t(T(n, K))$ (тогда необходимо $ZU \in {}^t(T(n, K)^*)$, поскольку U и Z обратимы). Согласно предыдущему, если Z существует, то оно единственно. Следовательно, для того чтобы $U \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} z_{ik}u_{kj} = 0 \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

(где $(z_{ij}) \in T_1(n, K)$) имела единственное решение. Но эта система может быть записана в виде

$$\sum_{k=i+1}^{n} z_{ik}u_{kj} = -u_{ij} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n). \tag{13}$$

Для каждого фиксированного i имеем систему из $n - i$ уравнений относительно неизвестных $z_{i,\,i+1}, z_{i,\,i+2}, \ldots, z_{i,\,n}$; для того чтобы каждая из этих систем имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det (u_{kj})_{i+1 \leqslant k \leqslant n,\ i+1 \leqslant j \leqslant n} \neq 0$$

для $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Тем самым доказано a). Отсюда следует, что Ω открыто в $\mathbf{GL}(n, K)$. С другой стороны, решая систему (13) по формулам Крамера, получаем z_{ij} как рациональные функции от u_{ij}, знаменатели которых отличны от нуля на Ω, и, значит, Z непрерывно зависит от U на Ω, чем доказано c).

Пусть теперь $G_1' \subset {}^t(T(n, K)^*)$ есть нижняя специальная треугольная группа. Отображение $(M, N) \mapsto MN$ есть непрерывная биекция ψ произведения $T_1(n, K) \times G_1'$ на некоторое $\Omega' \subset \mathbf{SL}(n, K)$.

Лемма 8. a) *Пусть* $U = (u_{ij}) \in \mathbf{SL}(n, K)$. *Для того чтобы* $U \in \Omega'$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\det (u_{ij})_{k \leqslant i,\ j \leqslant n} \neq 0$ *для* $k = 2, 3, \ldots, n$.

b) Ω' *есть открытое множество в* $\mathbf{SL}(n, K)$.

c) *Отображение* ψ *есть гомеоморфизм* $T_1(n, K) \times G_1'$ *на* Ω'.

В самом деле, пусть $M \in T_1(n, K)$ и $N \in {}^t(T(n, K)^*)$. Для того чтобы $MN \in \mathbf{SL}(n, K)$, необходимо и достаточно, чтобы $N \in G_1'$.

Следовательно,

$$\Omega' = \mathbf{SL}(n, K) \cap \Omega,$$

и лемма 8 сразу вытекает из леммы 7.

Предложение 6. a) *Группа* $\mathbf{SL}(n, K)$ *унимодулярна.*

b) *Пусть* μ_1 *и* μ_2 *— левые меры Хаара на верхней строго треугольной группе* $T_1(n, K)$ *и нижней специальной треугольной группе* G_1'. *Образ меры* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *при гомеоморфизме*

$$(M, N) \mapsto M \cdot N^{-1}$$

произведения $T_1(n, K) \times G_1'$ *на* Ω' *есть сужение на* Ω *меры Хаара группы* $\mathbf{SL}(n, K)$.

c) *Дополнение к* Ω' *в* $\mathbf{SL}(n, K)$ *пренебрежимо относительно меры Хаара группы* $\mathbf{SL}(n, K)$.

Группа $\mathbf{GL}(n, K)$ унимодулярна (пример 1), а группа $\mathbf{SL}(n, K)$ есть нормальный делитель группы $\mathbf{GL}(n, K)$ и, значит, тоже унимодулярна (§ 2, предложение 10b)). Утверждение b) вытекает из a), леммы 8 и предложения 13 § 2. Докажем c). Согласно лемме 8a), достаточно доказать следующее: если $p((u_{ij})_{1 \leq i,\ j \leq n})$ есть полином, не равный тождественно нулю на $\mathbf{SL}(n, K)$, то множество E тех $U \in \mathbf{SL}(n, K)$, для которых $p(U) = 0$, пренебрежимо относительно меры Хаара. Учитывая следствие предложения 13 § 1, получаем, что топология в $\mathbf{SL}(n, K)$ имеет счетный базис. Поэтому достаточно доказать, что любое $U_0 \in E$ обладает в $\mathbf{SL}(n, K)$ окрестностью, пересечение которой с E пренебрежимо; или еще, что I обладает в $\mathbf{SL}(n, K)$ такой окрестностью W, что $U_0^{-1}E \cap W$ пренебрежимо. Возьмем $W = \Omega$. В силу b), все сводится к тому, чтобы показать, что множество тех пар $(M, N) \in T_1(n, K) \times G_1'$, для которых $p(U_0MN) = 0$, пренебрежимо относительно $\mu_1 \otimes \mu_2$. Согласно выражениям мер μ_1 и μ_2 (вычисленным в примерах 3 и 5), это будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 9. *Пусть* ψ *— ненулевой полином из* $K[X_1, \ldots, X_r]$. *В пространстве* K^r *множество* N, *определенное уравнением* $\psi(x_1, \ldots, x_r) = 0$, *пренебрежимо относительно меры Хаара.*

Проведем доказательство индукцией по r. Для $r = 1$ лемма очевидна, так как тогда N — конечное множество. Изменив в случае надобности нумерацию переменных, можем считать,

что $\psi \notin K[X_1, \ldots, X_{r-1}]$; пусть

$$\psi(X_1, \ldots, X_r) = X_r^m \psi_0(X_1, \ldots, X_{r-1}) + \ldots + \psi_m(X_1, \ldots, X_{r-1})$$

с $m > 0$ и $\psi_0 \neq 0$. Пусть, далее, N_0 — подмножество пространства K^{r-1}, определяемое уравнением $\psi_0(x_1, \ldots, x_{r-1}) = 0$; согласно предположению индукции, оно пренебрежимо. Для каждого $(x_1, \ldots, x_{r-1}) \notin N_0$ множество тех $x_r \in K$, для которых $(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) \in N$, конечно и, значит, пренебрежимо. А так как K^r счетно в бесконечности (§ 1, следствие предложения 13), то $N \cap [(K^{r-1} - N_0) \times K]$ пренебрежимо в K^r (гл. V, § 8, следствие 8 предложения 5). Следовательно, N пренебрежимо.

Пример 7. *Разложение Ивасавы группы* $\mathbf{GL}(n, K)$.

В этом примере K означает одно из тел $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$. Если $\lambda \in K$, то под $\bar{\lambda}$ понимается λ, если $K = \mathbf{R}$, и сопряженное к λ, если $K = \mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. Пусть E есть n-мерное правое векторное пространство над K и Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на E.

Лемма 10. *Пусть $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — базис пространства E.*

a) *Существует, и притом единственный, ортонормальный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ пространства E, такой, что*

$$f_i = e_1\alpha_{i1} + e_2\alpha_{i2} + \ldots + e_i\alpha_{ii} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_{ii} > 0$ для всех i.

b) *При фиксированном Φ векторы e_i и коэффициенты α_{ij} непрерывно зависят от $(f_1, \ldots, f_n) \in E^n$.*

Пусть $E_i = f_1K + f_2K + \ldots + f_iK$; оно имеет размерность i. Пусть, далее, g_i — ненулевой элемент из E_i, ортогональный к E_{i-1} и такой, что $\Phi(g_i, g_i) = 1$. Индукцией по i убеждаемся, что $(g_1, \ldots, g_i)$ — ортонормальный базис пространства E_i. В частности, $(g_1, \ldots, g_n)$ есть ортонормальный базис пространства E. Пусть $\lambda_i = \Phi(g_i, f_i)$. Так как $f_i \notin E_{i-1}$, то $\lambda_i \neq 0$. Положим $e_i = g_i |\lambda_i| \lambda_i^{-1}$. Имеем

$$\Phi(e_i, e_i) = |\lambda_i|^2 \bar{\lambda}_i^{-1} \Phi(g_i, g_i) \lambda_i^{-1} = 1,$$

и, значит, $(e_1, \ldots, e_i)$ — тоже ортонормальный базис пространства E_i; при этом $\Phi(e_i, f_i) = |\lambda_i| \bar{\lambda}_i^{-1} \Phi(g_i, f_i) = |\lambda_i| > 0$, и, следовательно, e_i обладают свойствами, требуемыми в a). Пусть

$(e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой ортонормальный базис с теми же свойствами. Индукцией по i убеждаемся, что $(e'_1, \ldots, e'_i)$ должно быть базисом для E_i, и, значит, $e'_i = e_i\mu_i$ с $\mu_i \in K$. Имеем

$$1 = \Phi(e'_i, e'_i) = \overline{\mu}_i \Phi(e_i, e_i)\mu_i = \overline{\mu}_i\mu_i$$

и $0 < \Phi(e'_i, f_i) = \overline{\mu}_i \Phi(e_i, f_i)$, значит $\mu_i > 0$ и $\mu_i^2 = 1$, а стало быть, $\mu_i = 1$, чем доказано а). Предполагая доказанным, что e_i и α_{ij} непрерывно зависят от $(f_1, \ldots, f_n)$ для $i < i_0$, докажем, что e_{i_0} и $\alpha_{i_0 j}$ непрерывно зависят от $(f_1, \ldots, f_n)$. Для $j < i_0$, согласно предположению индукции, $\overline{\alpha}_{i_0 j} = \Phi(f_{i_0}, e_j)$ непрерывно зависит от $(f_1, \ldots, f_n)$. С другой стороны,

$$\Phi(f_{i_0}, f_{i_0}) = |\alpha_{i_0 1}|^2 + |\alpha_{i_0 2}|^2 + \ldots + |\alpha_{i_0, i_0-1}|^2 + \alpha_{i_0, i_0}^2,$$

и, значит, α_{i_0, i_0} непрерывно зависит от $(f_1, \ldots, f_n)$. Следовательно,

$$e_{i_0} = (f_{i_0} - e_1\alpha_{i_0 1} - \ldots - e_{i_0-1}\alpha_{i_0, i_0-1})\,\alpha_{i_0, i_0}^{-1}$$

непрерывно зависит от $(f_1, \ldots, f_n)$.

Начиная с этого момента, будем считать $E = K^n$, а за Φ примем форму $\overline{x}_1 y_1 + \ldots + \overline{x}_n y_n$. Напомним, что $\mathbf{U}(n, K)$ означает соответствующую унитарную группу. Даже если K не коммутативно, мы по-прежнему будем обозначать через $T_1(n, K)$ группу верхних треугольных матриц из $\mathbf{M}_n(K)$ с диагональю, состоящей из единиц.

Предложение 7. *Пусть D_+^* — группа диагональных матриц с элементами >0. Отображение $(U, D, T) \mapsto UDT$ есть гомеоморфизм произведения* $\mathbf{U}(n, K) \times D_+^* \times T_1(n, K)$ *на* $\mathbf{GL}(n, K)$.

Пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — канонический базис пространства K^n. И пусть $X \in \mathbf{GL}(n, K)$. Тогда $X \cdot \varepsilon_i = f_i$ образуют базис пространства E. Пусть (e_i) — базис, соответствующий этому базису (f_i) по лемме 10, и U — матрица унитарного автоморфизма пространства E, переводящая ε_i в e_i. Тогда $U^{-1}f_i = \varepsilon_1\alpha_{i1} + \varepsilon_2\alpha_{i2} + \ldots + \varepsilon_i\alpha_{ii}$, где $\alpha_{ii} > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $X = UC$, где C есть матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом, в силу леммы 10, U и C непрерывно зависят от X. С другой стороны, формула (8) показывает, что C представимо в виде DT с $D \in D_+^*$, $T \subset T_1(n, K)$, причем D и T непрерывно зависят от C. Единственность разложения $X = UDT$ вытекает из свойства единственности леммы 10.

Гомеоморфизм предложения 7 называется «разложением Ивасавы» группы $\mathbf{GL}(n, K)$.

Группа $G = D_+^* \cdot T_1(n, K)$ есть множество всех верхних треугольных матриц над K, диагональные элементы которых >0. Отождествим элемент (z_{ij}) этой группы с элементом

$$((z_{ii})_{1 \leq i \leq n}, \quad (z_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}) \in (\mathbf{R}_+^*)^n \times K^{n(n-1)/2}.$$

Рассуждая в точности так же, как в примере 4, находим в качестве *правой* меры Хаара на этой группе

$$\left(\prod_{i=1}^{n} z_{ii}^{-i}\right) \cdot \left(\bigotimes_{i=1}^{n} dz_{ii}\right) \otimes \left(\bigotimes_{i<j} dz_{ij}\right).$$

Тогда, применяя предложение 13 § 2, видим, что если отождествить $\mathbf{GL}(n, K)$ с $\mathbf{U}(n, K) \times G$ посредством отображения $(U, S) \mapsto US$, то мерой Хаара на $\mathbf{GL}(n, K)$ будет

$$\left(\prod_{i=1}^{n} z_{ii}^{-i}\right) \cdot \alpha \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} dz_{ii}\right) \otimes \left(\bigotimes_{i>j} dz_{ij}\right), \tag{14}$$

где через α обозначена мера Хаара на $\mathbf{U}(n, K)$.

Пример 8. *Пространства эрмитовых форм.*

В этом примере K всегда означает одно из тел $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$. Положим $\delta = \dim_{\mathbf{R}} K$ (так что $\delta = 1$, 2 или 4). Эрмитова форма на правом векторном пространстве K^n записывается в виде

$$\Phi(x, y) = \Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i, j=1}^{n} \bar{x}_i h_{ij} y_j,$$

где $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$ для всех i и j. Обозначим через $\mathfrak{H}$ векторное пространство над $\mathbf{R}$, образованное всеми эрмитовыми матрицами из $\mathbf{M}_n(K)$. Отображение $(h_{ij}) \mapsto \Phi$ есть изоморфизм пространства $\mathfrak{H}$ на векторное пространство всех эрмитовых форм на K^n, посредством которого мы будем отождествлять эти два пространства. Пусть $\mathfrak{H}_+^* \subset \mathfrak{H}$ есть множество всех невырожденных положительных эрмитовых форм на K^n. Множество $\mathfrak{H}_+^*$ *выпукло* в $\mathfrak{H}$;

действительно, если Φ_1 и $\Phi_2 \in \mathfrak{H}_+^*$, а λ и μ — такие два числа >0, что $\lambda + \mu = 1$, то ясно, что $\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2$ есть положительная эрмитова форма; с другой стороны, если $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)(x, x) = 0$, то $\Phi_1(x, x) = \Phi_2(x, x) = 0$ и, следовательно, $x = 0$, так что $\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2$ не вырождена. Покажем теперь, что $\mathfrak{H}_+^*$ есть *открытое* множество в $\mathfrak{H}$. Пусть S — множество тех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, для которых $x_1\overline{x_1} + \ldots + x_n\overline{x_n} = 1$; это — компактное множество в K^n; если $\Phi \in \mathfrak{H}_+^*$, то функция $x \mapsto \Phi(x, x)$ непрерывна и >0 на S, а значит, ее нижняя грань >0; следовательно, если $\Phi' \in \mathfrak{H}$ есть форма, достаточно близкая к Φ, то $\Phi'(x, x) > 0$ для всех $x \in S$, так что Φ' положительна и не вырождена.

Линейная группа $\mathbf{GL}(n, K)$ действует непрерывно справа в $\mathfrak{H}$ по закону $(X, \Phi) \mapsto \Phi_1 \circ X$, то есть по закону $(X, H) \mapsto {}^t\overline{X}HX$, если обозначить через H эрмитову матрицу, соответствующую Φ. Ясно, что $\mathfrak{H}_+^*$ устойчиво относительно $\mathbf{GL}(n, K)$. Более точно, в силу следствия 1 теоремы 1 § 6 главы IX Алгебры, $\mathfrak{H}_+^*$ есть орбита относительно $\mathbf{GL}(n, K)$ формы $\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i$, соответствующей единичной матрице I_n. Ее стабилизатор есть $\mathbf{U}(n, K)$. Согласно лемме 2 Приложения 1, $\mathfrak{H}_+^*$ отождествима, как топологическое однородное пространство, с $\mathbf{GL}(n, K)/\mathbf{U}(n, K)$.

Пусть $\widetilde{X}$ для любого $X \in \mathbf{GL}(n, K)$ означает автоморфизм

$$H \mapsto {}^t\overline{X}HX$$

действительного векторного пространства $\mathfrak{H}$. Обозначая через μ меру Хаара аддитивной группы $\mathfrak{H}$, имеем $\widetilde{X}^{-1}(\mu) = |\det \widetilde{X}| \cdot \mu$ (§ 1, предложение 15). Покажем, что

$$|\det \widetilde{X}| = |N(X)|^{\lambda}, \tag{15}$$

где N означает норму в $\mathbf{M}_n(K)$, *рассматриваемом как* $\mathbf{R}$-*алгебра*, а $\lambda = 1 - \frac{\delta - 2}{\delta n}$. Достаточно проверить (15) для X, пробегающего некоторую систему образующих группы $\mathbf{GL}(n, K)$, а следовательно (Алг., гл. II, 3-е изд., § 10, n° 13), для матриц X следующих типов:

а) X есть матрица отображения вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

где $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. В этом случае некоторая степень X равна 1, и, значит, $|\det \widetilde{X}| = |N(X)| = 1$.

b) X есть матрица отображения вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (ax_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда, если $(h_{ij}) \subset \mathfrak{H}$, то $\widetilde{X}((h_{ij})) = (h'_{ij})$ с $h'_{11} = ah_{11}\bar{a} = |a|^2 h_{11}$, $h'_{1i} = \bar{a}h_{1i}$ для $i > 1$, $h'_{ij} = h_{ij}$ для $i > 1$, $j > 1$; следовательно,

$$|\det \widetilde{X}| = |a|^2 |a|^{\delta(n-1)} = |a|^{2+\delta(n-1)}.$$

С другой стороны, если $Y = (y_{ij}) \in \mathbf{M}_n(K)$, то $XY = (y'_{ij})$ с $y'_{1j} = ay_{1j}$ и $y'_{ij} = y_{ij}$ для $i > 1$; значит, $|N(X)| = |a|^{\delta n}$. Формула (15) снова верна.

c) X есть матрица отображения вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 + bx_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Имеем $\widetilde{X}((h_{ij})) = (h'_{ij})$ с $h'_{11} = h_{11}$, $h'_{12} = h_{12} + h_{11}b$, $h'_{1i} = h_{1i}$ для $i > 2$, $h'_{22} = h_{22} + \bar{b}h_{12} + \bar{h}_{12}b + \bar{b}h_{11}b$, $h'_{2i} = h_{2i} + \bar{b}h_{1i}$ для $i > 2$, $h'_{ij} = h_{ij}$ для $i > 2$, $j > 2$. Принимая во внимание лемму 6, получаем, что $|\det \widetilde{X}| = 1$. Точно так же убеждаемся в том, что $|N(\widetilde{X})| = 1$, чем и завершается доказательство формулы (15).

Теперь мы видим, что мера $|N(H)|^{-\lambda/2}\, d\mu(H)$ на $\mathfrak{H}$ инвариантна относительно $\mathbf{GL}(n, K)$, ибо

$$\widetilde{X}^{-1}(|N(H)|^{-\lambda/2}\, d\mu(H)) = |N(\widetilde{X}(H))|^{-\lambda/2} |\det \widetilde{X}|\, d\mu(H) = \\ = |N(H)|^{-\lambda/2} |N(X)|^{-\lambda} |\det \widetilde{X}|\, d\mu(H) = |N(H)|^{-\lambda/2}\, d\mu(H).$$

Если $H \in \mathfrak{H}_+^*$, то $H = \widetilde{X}(I_n) = {}^t\bar{X}X$ для некоторого $X \in \mathbf{GL}(n, K)$, и поэтому $N(H) = \overline{N(X)}\, N(X) > 0$. Следовательно, *единственная*, с точностью до постоянного множителя, мера на $\mathfrak{H}_+^*$, инвариантная относительно $\mathbf{GL}(n, K)$ (см. § 2, теорема 3), есть мера

$$d\gamma(H) = N(H)^{-\lambda/2}\, d\mu(H).$$

В частности,

$$d\gamma(H) = (\det H)^{-(n+1)/2}\, d\mu(H) \quad \text{при} \quad K = \mathbf{R},$$

$$d\gamma(H) = (\det H)^{-n}\, d\mu(H) \quad \text{при} \quad K = \mathbf{C}.$$

Упражнения

1) Пусть E — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$, а Φ и Φ' — невырожденные положительные эрмитовы формы на E. Предположим, что $\mathrm{U}(\Phi) \subset \mathrm{U}(\Phi')$. Показать, что Φ и Φ' пропорциональны. [Использовать существование ортонормального базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ относительно Φ, который ортогонален относительно Φ'. Отображение $u \in \mathscr{L}(E, E)$, определяемое условиями $u(e_i) = e_j$, $u(e_j) = e_i$, $u(e_k) = e_k$ для $k \neq i, j$, принадлежит $\mathrm{U}(\Phi)$.]

2) При обозначениях леммы 7, показать, что Ω имеет дополнение в $\mathrm{GL}(n, K)$, пренебрежимое относительно меры Хаара. [Рассуждать как при доказательстве предложения 6.]

*3) Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует справа, непрерывно и совершенно, локально компактная группа H по закону $(x, \xi) \longmapsto x\xi$ $(x \in H, \xi \in H)$. Пусть, далее, π — каноническое отображение $X \to X/H$. Наконец, пусть ρ — непрерывное представление H в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Показать, что для любого $b \in X/H$ существуют окрестность U элемента b в X/H и непрерывное отображение r: $\pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ такие, что $r(x\xi) = r(x)\rho(\xi)$, каковы бы ни были $x \in \pi^{-1}(U)$ и $\xi \in H$. [Можно предполагать X/H компактным. Пусть f — непрерывная функция $\geqslant 0$ на X, не равная тождественно нулю на каждой орбите и имеющая компактный носитель. Положить

$$r(x) = \int_H f(x\xi)\, \rho(\xi)^{-1}\, d\beta(\xi) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}),$$

где β означает левую меру Хаара на H. Показать, что при надлежащем выборе f и U для всех $x \in \pi^{-1}(U)$ будет $r(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.]

4) Пусть K — недискретное локально компактное поле и A — алгебра конечного ранга над K.

a) Пусть $T(n, A)$ есть алгебра всех матриц $(x_{ij}) \in \mathbf{M}_n(A)$, у которых $x_{ij} = 0$ при $i > j$. Показать, что если $M = (m_{ij}) \in T(n, A)$, то

$$M_{T(n, A)/K}(M) = \prod_{i=1}^{n} N_{A/K}(m_{ii}^{i-n+1}).$$

[Использовать лемму 6.]

b) Пусть $T(n, A)^*$ — группа всех обратимых элементов из $T(n, A)$ и $M = (m_{ij}) \in T(n, A)$. Показать, что $M \in T(n, A)^*$ в том и только том случае, если m_{ii} обратимо в A при каждом i.

c) Обозначая через α меру Хаара аддитивной группы алгебры A, показать, что

$$\Bigl(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{mod} N_{A/K}(m_{ii})^{i-n-1}\Bigr) \cdot \bigotimes_{i \leqslant j} d\alpha(m_{ij})$$

есть левая мера Хаара на $T(n, A)^*$.

d) Показать, что если $N_{A/K} = N_{A^\circ/K}$, то

$$\Delta_{T(n,\, A)^*}((m_{ij})) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{mod} N_{A/K}(m_{ii})^{2i-n-1}.$$

5) Пусть $\mathbf{R}^n$ наделено квадратичной формой $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ и G_n — его группа движений с определителем 1.

a) Показать, что G_n унимодулярна.

b) Всякий элемент из G_2 единственным образом записывается в виде

$$(x,\, y) \longmapsto (u + x\cos\omega - y\sin\omega,\quad v + x\sin\omega + y\cos\omega),$$

где u и v принадлежат $\mathbf{R}$, а ω — элемент группы Θ углов между полупрямыми, изоморфной $\mathbf{U}$. Показать, что $du \otimes dv \otimes d\omega$ (где $d\omega$ — мера Хаара на Θ) есть мера Хаара на G_2.

6) Пусть P — множество всех комплексных чисел $z = x + iy$, мнимая часть которых > 0. Показать, что $\mathbf{SL}(2,\, \mathbf{R})$ действует транзитивно и непрерывно слева в P по закону

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

и что P превращается таким путем в топологическое однородное пространство относительно $\mathbf{SL}(2,\, \mathbf{R})$. Показать, что $y^{-2}\, dx\, dy$ есть инвариантная мера на P.

*7) Пусть G — унимодулярная группа $\mathbf{SL}(n,\, \mathbf{R})$ и Γ — ее подгруппа, состоящая из всех целочисленных матриц с определителем 1. Показать индукцией по n, что всякая инвариантная мера μ на однородном пространстве G/Γ ограничена и что при надлежащем выборе μ для всех $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \int_{G/\Gamma} \Bigl(\sum_{z \in \mathbf{Z}^n,\; z \neq 0} f(Xz) \Bigr)\, d\mu(\dot{X}) \tag{1}$$

($\dot{X} = X\Gamma$). [Пусть G' — подгруппа группы G, образованная всеми матрицами, оставляющими инвариантным базисный вектор $(1,\, 0,\, 0,\, \ldots,\, 0)$, так что G/G' отождествима с $\mathbf{R}^n$. Пусть $G'' = G' \cap \Gamma$, а H — подгруппа всех матриц $\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ из G', в которых $Y \in \mathbf{SL}(n-1,\, \mathbf{R})$ — целочисленная матрица. Тогда H/G'' компактно и, по предположению индукции, G'/H имеет конечную инвариантную меру, а следовательно, в силу предложения 12 § 2, G'/G'' имеет конечную инвариантную меру. Применяя упражнение 6 § 2 и упражнение 20б из Алг., гл. VII, § 4, показать, что для $f \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$

$$a \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \int_{G/\Gamma} \Bigl(\sum f(Xm) \Bigr)\, d\mu(\dot{X}),$$

где суммирование распространяется на все векторы $m = (m_1, \ldots, m_n)$ с целыми взаимно простыми в совокупности координатами. Применив это к функциям $f(2x)$, $f(3x)$, ... и просуммировав, доказать (1). Затем, заменив f функцией $x \longmapsto \varepsilon^n f(\varepsilon x)$ с $f \geqslant 0$ и устремив ε к 0, показать, что всякое компактное подмножество из G/Γ имеет меру $\leqslant 1$.]

8) a) Показать, что на $\mathbf{S}_{n-1}$ существует, и притом единственная с точностью до постоянного множителя, мера ω_{n-1}, инвариантная относительно $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ [рассмотреть $\mathbf{S}_{n-1}$ как однородное пространство относительно $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$].

b) Отображение $(t, z) \longmapsto tz$ позволяет отождествить топологическое пространство $\mathbf{R}^n - \{0\}$ с топологическим пространством $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}_{n-1}$. Показать, что тогда мера, индуцированная на $\mathbf{R}^n - \{0\}$ мерой Лебега из $\mathbf{R}^n$, отождествляется, с точностью до постоянной, с $t^{n-1}\, dt \otimes d\omega_{n-1}(z)$. [Использовать инвариантность меры Лебега пространства $\mathbf{R}^n$ относительно $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ и то, что мера Лебега замкнутого шара с центром 0 и радиусом r пропорциональна r^n.]

c) Пусть L_h есть пересечение $\mathbf{S}_{n-1}$ с гиперплоскостью $x_n = h$. Непустые L_h являются классами интранзитивности группы $\mathbf{O}(n-1, \mathbf{R})$ в $\mathbf{S}_{n-1}$. Показать, что ω_{n-1} представимо в виде $\int \lambda_h\, d\nu(h)$, где λ_h есть инвариантная относительно $\mathbf{O}(n-1, \mathbf{R})$ мера, сосредоточенная на L_h, а ν — некоторая мера на $[-1, 1]$. Отождествляя L_h с $\mathbf{S}_{n-2}$ посредством отображения $z \longmapsto he_n + \sqrt{1-h^2}z$, можно предполагать, что $\lambda_h = \omega_{n-2}$. Пусть K_θ — подмножество из $\mathbf{S}_{n-1}$, определяемое неравенствами $\sin\theta \leqslant x_n \leqslant 1$. Вычисляя меру Лебега множества точек tz $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in K_\theta)$, показать, что $\omega_{n-1}(K_\theta)$ пропорциональна $\int_\theta^{\pi/2} \cos^{n-2}\varphi\, d\varphi$. Вывести отсюда, что если положить $h = \sin\theta$ $(-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$, то мера ν отождествится с $\cos^{n-2}\theta\, d\theta$.

d) Индукцией по n получить, что

$$d\omega_{n-1} = \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1},$$

где

$$x_1 = \sin\theta_1,$$
$$x_2 = \cos\theta_1 \sin\theta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1},$$
$$x_n = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1},$$

с $\qquad -\pi/2 \leqslant \theta_i \leqslant \pi/2 \ (1 \leqslant i \leqslant n-2)$ и $0 \leqslant \theta_{n-1} < 2\pi$.

9) Пусть (e_1, e_2, e_3) — канонический базис пространства $\mathbf{R}^3$. Всякая матрица $\sigma \in \mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$, обладающая тем свойством, что $\sigma(e_3) \neq e_3$

и $\sigma(e_3) \neq -e_3$, может быть записана единственным образом в виде

$$\sigma(\varphi, \psi, \theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

где $0 < \theta < \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$ («эйлеровы углы»). Показать, что $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi$ есть мера Хаара на $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$. [Отождествить однородное пространство $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})/\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ с $\mathbf{S}_2$, использовать предыдущее упражнение 8 и теорему 3 § 2.]

10) Пусть D — группа движений пространства $\mathbf{R}^3$ с определителем 1, полупрямое произведение группы $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ и группы T переносов. Используем обозначение $\sigma(\varphi, \psi, \theta)$ из упражнения 9 и обозначим через $t(\xi, \eta, \zeta)$ перенос на вектор (ξ, η, ζ).

a) Пусть H — замкнутая подгруппа, образованная всеми элементами группы D, преобразующими $\mathbf{R}e_3$ в себя с сохранением ориентации. Показать, что H есть произведение группы переносов $t(0, 0, \zeta)$ и группы вращений $\sigma(\omega, 0, 0)$. Вывести отсюда, что однородное пространство $E = D/H$, отождествимое с пространством ориентированных аффинных прямых из $\mathbf{R}^3$, обладает мерой, инвариантной относительно D и единственной с точностью до постоянного множителя. [Использовать упражнение 5a).]

b) Пусть E_1 — открытое подпространство в E, образованное всеми ориентированными прямыми, не ортогональными к e_3; такая ориентированная прямая может быть определена координатами ξ', η' ее точки пересечения с $\mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2$ и координатами $(\sin\varphi\sin\theta,$ $-\cos\varphi\sin\theta,$ $\cos\theta)$ направляющего вектора. Показать, что

$$\sin\theta\,|\cos\theta|\, d\xi'\, d\eta'\, d\varphi\, d\theta$$

есть мера на E_1, инвариантная относительно D.

11) Пусть G — компактная группа $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ и λ — нормированная мера Хаара на G. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G, оставляющая (глобально) инвариантным подпространство $\mathbf{R}^k$ пространства $\mathbf{R}^n$, где $0 < k < n$; однородное пространство G/H, наделенное своей фактортопологией, канонически отождествимо с грассманианом $E = G_{n-1,\, k-1}(\mathbf{R})$ (Общ. топ., гл. VI, § 3, n° 6) k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$. На E имеется мера μ, инвариантная относительно G и определенная с точностью до постоянного множителя. Пусть σ_P для любого подпространства $P \in E$ означает образ меры Лебега для $\mathbf{R}^k$ при таком $s \in G$, что $s \cdot \mathbf{R}^k = P$ (независимый от элемента $s \in G$, удовлетворяющего этому соотношению). Показать, что можно выбрать μ так, чтобы выполнялось следующее свойство: для любой непрерывной функции f на $\mathbf{R}^n$ с компактным носителем и любого

$P \in E$ положим $F(P) = \int\limits_P f(x)\,d\sigma(x)$. Тогда

$$\int\limits_E F(P)\,d\mu(P) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \|x\|^{k-n} f(x)\,dx.$$

[Полагая $P_0 = \mathbf{R}^k$, заметить, что можно написать $\int\limits_E F(P)\,d\mu(P) = c \int\limits_G F(s \cdot P_0)\,d\lambda(s)$ с надлежащей постоянной c, а, с другой стороны, в обозначениях упражнения 8,

$$\int\limits_G f(s \cdot x)\,d\lambda(s) = c' \int\limits_{\mathrm{S}_{n-1}} f(\|x\| z)\,d\omega_{n-1}(z);$$

наконец, воспользоваться упражнением 8b).]

*12) Пусть E — векторное пространство над полем K, F — его векторное подпространство, p — канонический гомоморфизм E на E/F и A — множество тех гомоморфизмов $f\colon E/F \to E$, для которых $p \circ f$ есть тождественный гомоморфизм пространства E/F.

a) Если $f \in A$ и $h \in \operatorname{Hom}(E/F, F)$, то $f + h \in A$. Показать, что если $f, f' \in A$, то существует, и притом единственное, $h \in \operatorname{Hom}(E/F, F)$ такое, что $f + h = f'$. Следовательно, A можно рассматривать как аффинное пространство, для которого $\operatorname{Hom}(E/F, F)$ служит пространством переносов.

b) Пусть B — множество всех векторных подпространств в E, дополнительных к F в E. Показать, что $f \mapsto f(E/F)$ есть биекция A на B. Следовательно, B можно рассматривать как аффинное пространство, для которого $\operatorname{Hom}(E/F, F)$ служит пространством переносов.

c) Показать, что если u — автоморфизм пространства E, для которого $u(F) = F$, то отображение $f \mapsto u \circ f$ есть аффинная биекция A на A. [Выбрать начало в A и заметить, что отображение $h \mapsto u \circ h$ есть автоморфизм векторного пространства $\operatorname{Hom}(E/F, F)$.] Вывести отсюда, что отображение $F' \mapsto u(F')$ есть аффинная биекция B на B.

d) Предположим, что $K = \mathbf{R}$ и $\dim E < +\infty$. Пусть G — компактная группа и ρ — такое непрерывное линейное представление G в E, что $\rho(s)(F) = F$ для всех $s \in G$. Показать, что существует такое $F' \in B$, что $\rho(s)(F') = F'$ для всех $s \in G$. [Использовать c) и лемму 2.] Получить этот результат другим путем, используя предложение 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

К ГЛАВЕ VII

Лемма 1. *Пусть X — локально компактное пространство и R — такое открытое отношение эквивалентности в X, что факторпространство X/R паракомпактно; пусть, далее, π — каноническое отображение X на X/R. На X существует такая непрерывная функция $F \geqslant 0$, что*

a) *F не обращается тождественно в нуль ни на каком классе по R;*

b) *для любого компактного подмножества K из X/K пересечение $\pi^{-1}(K)$ с $\operatorname{supp} F$ компактно.*

Поставим в соответствие каждой точке $u \in X/R$ такую функцию $f_u \in \mathscr{K}_+(X)$, что f_u не равна тождественно нулю на $\pi^{-1}(u)$; пусть Ω_u — открытое множество тех точек, в которых $f_u > 0$; следовательно, $u \in \pi(\Omega_u)$. Так как π — открытое отображение, то множества $\pi(\Omega_u)$ образуют открытое покрытие пространства X/R. Существует локально конечное открытое покрытие $(U_\iota)_{\iota \in I}$, более тонкое, чем покрытие множествами $\pi(\Omega_u)$, и, далее (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 4, предложение 3), разбиение единицы $(g_\iota)_{\iota \in I}$ на X/R, подчиненное покрытию (U_ι). Выберем для каждого $\iota \in I$ такое u_ι, что $U_\iota \subset \pi(\Omega_{u_\iota})$. Функция $F_\iota = (g_\iota \circ \pi) \cdot f_{u_\iota}$ принадлежит $\mathscr{K}(X)$ и имеет носитель, содержащийся в $\pi^{-1}(U_\iota)$. Следовательно, носители функций F_ι составляют локально конечное семейство, так что, положив $F = \sum\limits_{\iota \in I} F_\iota$, мы определим на X непрерывную функцию $F \geqslant 0$. Для любого $u \in X/R$ существует такое ι, что $g_\iota(u) > 0$, и, значит, $u \in U_\iota$; далее, существует такое $x \in \Omega_{u_\iota}$, что $\pi(x) = u$; тогда $f_{u_\iota}(x) > 0$ и $g_\iota(\pi(x)) > 0$, а следовательно, $F_\iota(x) > 0$ и тем более $F(x) > 0$; это доказывает, что F обладает свойством a).

Наконец, пусть K есть компактное подмножество из X/R. Существует такое конечное множество $J \subset I$, что для $\iota \in I - J$ имеем $U_\iota \cap K = \varnothing$, и, стало быть, $\pi^{-1}(K) \cap \operatorname{supp} F_\iota = \varnothing$. Тогда множество

$$\pi^{-1}(K) \cap \operatorname{supp} F = \pi^{-1}(K) \cap (\bigcup_{\iota \in I} \operatorname{supp} F_\iota) = \pi^{-1}(K) \cap (\bigcup_{\iota \in I} \operatorname{supp} F_\iota)$$

компактно.

Лемма 2. *Пусть G — локально компактная группа, счетная в бесконечности, и M — отделимое пространство Бэра. Предположим, что G действует слева непрерывно и транзитивно в M. Пусть H_x для любого $x \in M$ означает стабилизатор элемента x в G, так что отображение $s \mapsto sx$ группы G на M определяет факторизацией непрерывную биекцию φ_x факторпространства G/H_x на M. Тогда φ_x есть гомеоморфизм G/H_x на M* (иными словами (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, n° 5), M есть топологическое однородное пространство).

Пусть $x_0 \in M$. Достаточно доказать (там же, предложение 15), что отображение $s \mapsto sx_0$ переводит всякую окрестность V элемента e в G в некоторую окрестность элемента x_0 в M. Пусть W — такая симметричная компактная окрестность элемента e, что $W^2 \subset V$. По условию, G есть объединение последовательности компактных множеств, а значит, и некоторой последовательности переносов $(s_n W)$ окрестности W. Тогда M есть объединение последовательности компактных множеств $(s_n W x_0)$. Так как M — пространство Бэра, то существует такой номер n, что $s_n W x_0$ обладает внутренней точкой $s_n w x_0$ ($w \in W$). Следовательно, x_0 есть внутренняя точка множества

$$w^{-1} s_n^{-1} (s_n W x_0) = w^{-1} W x_0 \subset V x_0,$$

так что $V x_0$ есть окрестность точки x_0 в M.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

К ГЛАВЕ VII

Лемма 1. *Пусть X, B — локально компактные пространства, π — отображение X в B и ν — положительная мера на B. Пусть, далее, $b \mapsto \lambda_b$ ($b \in B$) есть такое ν-согласованное семейство положительных мер на X, что для любого $b \in B$ мера λ_b сосредоточена на $\pi^{-1}(b)$. Положим $\mu = \int \lambda_b \, d\nu(b)$ и допустим, что отображение π μ-измеримо.*

a) *Если $N \subset B$ локально ν-пренебрежимо, то $\pi^{-1}(N)$ локально μ-пренебрежимо.*

b) *Если f есть ν-измеримая функция на B (со значениями в топологическом пространстве), то $f \circ \pi$ μ-измерима на X.*

Пусть K — компактное подмножество из X. Требуется доказать, что $\pi^{-1}(N) \cap K$ μ-пренебрежимо, а сужение функции $f \circ \pi$ на K μ-измеримо. Но K есть объединение μ-пренебрежимого множества и последовательности таких компактных множеств K_n, что $\pi | K_n$ непрерывно. Достаточно показать, что $\pi^{-1}(N) \cap K_n$ μ-пренебрежимо и сужение $f \circ \pi$ на K_n μ-измеримо. Итак, мы будем в дальнейшем предполагать, что $\pi | K$ непрерывно. Тогда $\pi(K) = K'$ компактно. Так как $\pi^{-1}(N) \cap K = \pi^{-1}(N \cap K') \cap K$ и $N \cap K'$ ν-пренебрежимо, то мы будем в дальнейшем предполагать, что N ν-пренебрежимо. Тогда N содержится в некотором ν-пренебрежимом множестве N', являющемся счетным пересечением открытых множеств (гл. IV, § 4, следствие 2 теоремы 4). Так как π μ-измеримо, то $\pi^{-1}(N')$ μ-измеримо (гл. IV, § 5, предложение 8), значит, $\pi^{-1}(N') \cap K$ μ-интегрируемо, и мы имеем (гл. V, § 3, теорема 1)

$$\mu(\pi^{-1}(N') \cap K) = \int_B \lambda_b (\pi^{-1}(N') \cap K) \, d\nu(b).$$

Но если $b \notin N'$, то $\pi^{-1}(N') \cap K$ λ_b-пренебрежимо, поскольку λ_b, по условию, сосредоточена в $\pi^{-1}(b)$. Следовательно, $\mu(\pi^{-1}(N') \cap K) = 0$. Тем более, $\pi^{-1}(N) \cap K$ μ-пренебрежимо, чем a) и доказано. С другой стороны, существует разбиение множества K', состоящее из ν-пренебрежимого множества M и некоторой последовательности (K'_n) таких компактных множеств, что $f \mid K'_n$ непрерывно. Тогда сужение функции $f \circ \pi$ на каждое множество $\pi^{-1}(K'_n) \cap K$ непрерывно, а так как $\pi^{-1}(M) \cap K$, в силу a), μ-пренебрежимо, то сужение функции $f \circ \pi$ на K μ-измеримо.

ГЛАВА VIII

СВЕРТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Свертка

1. *Определения и примеры*

Напомним (гл. V, § 6, n°n° 1 и 4; гл. VI, § 2, n° 10), что если X и Y — локально компактные пространства, μ — мера на X и φ есть отображение X в Y, то φ называется μ-*собственным*, если: a) φ μ-измеримо; b) для каждого компактного подмножества K из Y множество $\varphi^{-1}(K)$ существенно μ-интегрируемо. Тогда мера-образ $\nu = \varphi(\mu)$ на Y существует и обладает следующим свойством: для того чтобы функция f на Y со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$ была существенно интегрируема относительно ν, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \varphi$ была существенно интегрируемой относительно μ, и тогда

$$\int\limits_Y f(y)\,d\nu(y) = \int\limits_X f(\varphi(x))\,d\mu(x).$$

Определение 1. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ — *локально компактные пространства и* μ_i — *мера на* X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; *далее, пусть* X — *произведение пространств* X_i *и* μ — *произведение мер* μ_i. *И, наконец, пусть* φ — *отображение пространства* X *в локально компактное пространство* Y. *Последовательность* (μ_i) *называется* φ-*свертываемой, а* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ φ-*свертываемыми, если* φ μ-*собственно; в этом случае образ* $\nu = \varphi(\mu)$ *меры* μ *при отображении* φ *называется сверткой мер* μ_i *относительно* φ *и обозначается*

$$\mathop{\ast}\nolimits_{\varphi}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, \text{ или } \mathop{\ast}_{i=1}^{n} \mu_i, \text{ или } \mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n.$$

Последние два обозначения используются, разумеется, лишь в том случае, когда не может возникнуть никаких сомнений относительно φ.

Пусть f — функция на Y со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы f была существенно интегрируема относительно $\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n$, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$$

была существенно интегрируема относительно $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, и тогда справедлива формула

$$\int f\, d(\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n) = \int f(\varphi(x_1, \ldots, x_n))\, d\mu_1(x_1) \ldots d\mu_n(x_n), \qquad (1)$$

которую можно рассматривать как формулу, *определяющую* $\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n$, если брать в ней $f \in \mathcal{K}(Y)$.

Из определений сразу вытекает, что μ_i свертываемы в том и только том случае, когда свертываемы $|\mu_i|$. Тогда имеем

$$|\varphi(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n)| \leqslant \varphi(|\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n|) = \varphi(|\mu_1| \otimes \ldots \otimes |\mu_n|)$$

(гл. VI, § 2, n° 10), то есть

$$|\mathop{\ast}_i \mu_i| \leqslant \mathop{\ast}_i |\mu_i|. \qquad (2)$$

Если μ_i — положительные свертываемые меры и ν_i — такая мера на X_i, что $0 \leqslant \nu_i \leqslant \mu_i$, то ν_i свертываемы и

$$\mathop{\ast}_i \nu_i \leqslant \mathop{\ast}_i \mu_i.$$

Предположим, что $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ свертываемы и $\mu_1', \mu_2, \ldots, \mu_n$ свертываемы (где μ_1' — мера на X_1). В силу предложения 6 § 6 главы V, $\mu_1 + \mu_1', \mu_2, \ldots, \mu_n$ свертываемы и

$$(\mu_1 + \mu_1') * \mu_2 * \ldots * \mu_n = \mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n + \mu_1' * \mu_2 * \ldots * \mu_n.$$

П р и м е р ы . 1) Каково бы ни было φ, меры ε_{x_i}, где $x_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, всегда свертываемы и имеют в качестве свертки ε_y, где $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, если каждая из мер μ_i имеет конечный носитель, то μ_i свертываемы и $\mu_1 * \ldots * \mu_n$ имеет конечный носитель. В частности, пусть M — моноид, наделенный локально компактной топологией; если взять в качестве φ закон композиции в M, то меры на M с конечным носителем

образуют, относительно свертки, алгебру, которая есть не что иное, как *алгебра моноида* M (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, в зависимости от того, какие меры рассматриваются — действительные или комплексные).

2) Пусть M — моноид, наделенный дискретной топологией; предположим, что для любого $m \in M$ имеется лишь конечное множество пар $(m', m'') \in M \times M$ таких, что $m'm'' = m$; то же можно выразить, сказав, что закон композиции в M является совершенным отображением $M \times M$ в M; тогда меры на M образуют, относительно свертки, алгебру, которая есть не что иное, как *расширенная алгебра моноида* M; отметим следующие два случая:

a) $M = \mathbf{N}$, закон композиции — сложение. Каждой мере μ на $\mathbf{N}$ поставим в соответствие формальный ряд

$$S(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{n\})\, t^n$$

с одним переменным t. Тогда $S(\mu * \mu') = S(\mu)\, S(\mu')$. Аналогичное замечание применимо к формальным рядам с любым числом переменных.

°b) $M = \mathbf{N}^*$, закон композиции — умножение. Каждой мере μ на $\mathbf{N}^*$ поставим в соответствие формальный ряд Дирихле

$$D(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\})\, n^{-s}.$$

Тогда $D(\mu * \mu') = D(\mu)\, D(\mu')$.$_\circ$

3) Пусть X, Y, Z — локально компактные пространства, а φ — непрерывное отображение $X \times Y$ в Z. Если $x \in X$ и μ — мера на Y, то утверждать, что ε_x и μ φ-свертываемы, все равно что утверждать, что отображение $\varphi(x, \cdot)$ пространства Y в Z μ-собственно. И тогда $\varepsilon_x * \mu = \varphi(x, \cdot)(\mu)$.

2. *Ассоциативность*

Следующая лемма дополняет предложение 7 § 8 главы V:

Лемма 1. *Пусть X_i, Y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — локально компактные пространства, μ_i — мера на X_i и φ_i — непрерывное отображение X_i в Y_i. Далее, пусть $X = \prod_i X_i$, $Y = \prod_i Y_i$, $\mu = \bigotimes_i \mu_i$, а φ — отображение X в Y, являющееся произведением отображений φ_i.*

Если φ μ-*собственно и* $\mu_i \neq 0$ *для всех* i, *то* φ_i μ_i-*собственны и* $\varphi(\mu) = \bigotimes_i \varphi_i(\mu_i)$.

Можно предполагать, что μ_i положительны и $n=2$. Пусть $f_1 \in \mathscr{K}_+(Y_1)$. Так как $\mu_2 \neq 0$, то существует такая функция $f_2 \in \mathscr{K}_+(Y_2)$, что $f_2 \circ \varphi_2$ не μ_2-пренебрежима. Функция $(x_1, x_2) \mapsto f_1(\varphi_1(x_1)) f_2(\varphi_2(x_2))$ существенно μ-интегрируема и непрерывна, а значит, μ-интегрируема. Стало быть, существует такое $x_2 \in X_2$, что $f_2(\varphi_2(x_2)) \neq 0$ и функция $x_1 \mapsto f_1(\varphi_1(x_1)) f_2(\varphi_2(x_2))$ μ_1-интегрируема. Следовательно, $f_1 \circ \varphi_1$ μ_1-интегрируема, чем доказано, что отображение φ_1 μ_1-собственно. Точно такое же рассуждение можно провести и для φ_2. Согласно предложению 7 § 8 главы V, $\varphi(\mu) = \bigotimes_i \varphi_i(\mu_i)$.

Следующая лемма дополняет предложение 4 § 6 главы V.

Лемма 2. *Пусть* T, T', T'' — *локально компактные пространства,* μ — *мера на* T, π — μ-*измеримое отображение* T *в* T', π' — *непрерывное отображение* T' *в* T'' *и* $\pi'' = \pi' \circ \pi$. *Если* π'' μ-*собственно, то* π μ-*собственно,* π' $\pi(\mu)$-*собственно и* $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$.

Пусть K' — компактное подмножество из T'. Тогда $K'' = \pi'(K')$ компактно, значит, $\pi''^{-1}(K'')$ существенно μ-интегрируемо, и, следовательно, $\pi^{-1}(K') \subset \pi''^{-1}(K'')$ существенно μ-интегрируемо, так что π μ-собственно. Тогда π' $\pi(\mu)$-собственно и $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$ в силу предложения 4 § 6 главы V.

Предложение 1. *Пусть* X_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$, Y_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, Z — *локально компактные пространства; пусть* φ_i *для каждого* i *есть отображение пространства* $X_i = \prod_j X_{ij}$ *в* Y_i *и* φ — *отображение пространства* $X = \prod_i X_i$ *в* $Y = \prod_i Y_i$, *являющееся произведением отображений* φ_i; *наконец, пусть* ψ — *отображение* Y *в* Z.

(I) *Пусть* μ_{ij} — *такие меры, заданные соответственно на* X_{ij}, *что для каждого* i *меры* μ_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant n)$ φ_i-*свертываемы и меры* $\mathop{\ast}_i |\mu_{ij}|$ ψ-*свертываемы; тогда меры* μ_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$ $(\psi \circ \varphi)$-*свертываемы и*

$$\mathop{\ast}_{i,j} \mu_{ij} = \mathop{\ast}_i \left(\mathop{\ast}_j \mu_{ij}\right). \tag{3}$$

(II) *Предположим, что* ψ *и* φ_i *непрерывны, и пусть* μ_{ij} — *ненулевые меры, заданные соответственно на* X_{ij} *и* $(\psi\circ\varphi)$*-свертываемые; тогда для каждого* i *меры* μ_{ij} $(1\leqslant j\leqslant n_j)$ φ_i*-свертываемы, меры* $\mathop{\ast}\limits_i |\mu_{ij}|$ ψ*-свертываемы и справедлива формула* (3).

Достаточно ограничиться случаем, когда все рассматриваемые меры положительны.

Пусть выполнены условия утверждения (I). Отображение φ собственно относительно $\bigotimes\limits_{i,j}\mu_{ij}$ и $\varphi(\bigotimes\limits_{i,j}\mu_{ij})=\bigotimes\limits_i\varphi_i(\bigotimes\limits_j\mu_{ij})=\bigotimes\limits_i(\mathop{\ast}\limits_j\mu_{ij})$ (гл. V, § 8, предложение 7). Отображение $\psi\circ\varphi$ собственно относительно $\bigotimes\limits_{i,j}\mu_{ij}$ и $(\psi\circ\varphi)(\bigotimes\limits_{i,j}\mu_{ij})=\psi(\bigotimes\limits_i(\mathop{\ast}\limits_j\mu_{ij}))=\mathop{\ast}\limits_i(\mathop{\ast}\limits_j\mu_{ij})$ (гл. V, § 6, предложение 4). Следовательно, меры μ_{ij} $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n_i)$ $(\psi\circ\varphi)$-свертываемы и справедлива формула (3).

Пусть теперь выполнены условия утверждения (II). Прежде всего, лемма 2 показывает, что φ собственно относительно $\bigotimes\limits_{i,j}\mu_{ij}$. Тогда из леммы 1 следует, что φ_i для любого i собственно относительно $\bigotimes\limits_j\mu_{ij}$ и

$$\varphi(\bigotimes_{i,j}\mu_{ij})=\bigotimes_i(\mathop{\ast}_j\mu_{ij}).$$

Согласно лемме 2, ψ собственно относительно $\bigotimes\limits_i(\mathop{\ast}\limits_j\mu_{ij})$, откуда и следует предложение.

Следствие. *Пусть* X_i, X'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, Y, Y' — *локально компактные пространства, а* φ *и* φ' — *непрерывные отображения соответственно* $X=\prod\limits_i X_i$ *в* Y *и* $X'=\prod\limits_i X'$ *в* Y'; *пусть, далее,* f_i — *непрерывные отображения* X_i *в* X'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ *и* g — *непрерывное отображение* Y *в* Y' *такие, что* $\varphi'\circ f=g\circ\varphi$, *где* f — *отображение* X *в* X', *являющееся произведением отображений* f_i. *Пусть, наконец,* μ_i — *ненулевые меры, заданные соответственно на* X_i. *Тогда следующие два утверждения равносильны:*

(I) f_i μ_i*-собственно при любом* i *и меры* $f_i(|\mu_i|)$ φ'*-свертываемы.*

(II) μ_i φ*-свертываемы и* g *собственно относительно* $\ast_\varphi(|\mu_i|)$.

Кроме того, если эти утверждения справедливы, то

$$\ast_{\varphi'}(f_i(\mu_i))=g(\ast_\varphi\mu_i)=\mathop{\ast}_i{}_{g\circ\varphi}(\mu_i). \tag{4}$$

В самом деле, пусть $h = \varphi' \circ f = g \circ f$. В силу предложения 1, каждое из условий (I) и (II) равносильно следующему:

(III) μ_i h-свертываемы.

А если оно выполнено, то

$$\divideontimes_{\varphi'} (f_i(\mu_i)) = \divideontimes_h \mu_i = g(\divideontimes_\varphi \mu_i).$$

3. Случай ограниченных мер

Предложение 2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$, Y — локально компактные пространства, μ_i — ограниченная мера на X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, μ — произведение мер μ_i и φ — μ-измеримое отображение $\prod_i X_i$ в Y. Тогда меры μ_i φ-свертываемы и $\| \divideontimes_{i=1}^{n} \mu_i \| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \| \mu_i \|$. Если при этом μ_i положительны, то $\| \divideontimes_{i=1}^{n} \mu_i \| = \prod_{i=1}^{n} \| \mu_i \|$.*

Действительно, $\mu_i' = |\mu_i|$ ограничена и $\| \mu_i' \| = \| \mu_i \|$ (гл. VI, § 2, предложение 13). Имеем $|\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n| = \mu_1' \otimes \ldots \otimes \mu_n'$ (гл. VI, § 2, n° 10), и, значит, $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ ограничена и

$$\| \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n \| = \| \mu_1 \| \ldots \| \mu_n \|$$

(гл. V, § 8, следствие 6 предложения 5). Следовательно, φ μ-собственно (гл. V, § 6, n° 1, замечание 1), то есть меры μ_i φ-свертываемы. Имеем $\| \divideontimes_{i=1}^{n} \mu_i' \| = \| \mu_1' \otimes \ldots \otimes \mu_n' \|$ (гл. V, § 6, теорема 1), и, значит, $\| \divideontimes_{i=1}^{n} \mu_i' \| = \| \mu_1' \| \ldots \| \mu_n' \|$. Наконец, $| \divideontimes_i \mu_i | \leqslant \divideontimes_i \mu_i'$ (n° 1, формула (2)), и, следовательно,

$$\| \divideontimes_i \mu_i \| \leqslant \| \divideontimes_i \mu_i' \| = \prod_{i=1}^{n} \| \mu_i \|.$$

Предложение 3. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$, Y — локально компактные пространства и φ — непрерывное отображение $\prod_{i=1}^{n} X_i$ в Y. Тогда $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \mapsto \divideontimes_\varphi \mu_i$ есть непрерывное полилинейное отображение произведения $\prod_{i=1}^{n} \mathscr{M}^1(X_i)$ в $\mathscr{M}^1(Y)$.*

Это следует из предложения 2 и сказанного в n° 1.

4. *Свойства, касающиеся носителей*

Предложение 4. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$, Y — локально компактные пространства, μ_i — мера на X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, S_i — ее носитель и φ — такое непрерывное отображение $\prod\limits_i X_i$ в Y, что сужение φ на $\prod\limits_i S_i$ совершенно. Тогда μ_i φ-свертываемы.*

Действительно, пусть K — компактное подмножество из Y. Носителем меры $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ служит $S = \prod\limits_i S_i$ (гл. III, § 5, предложение 2). Следовательно, $\varphi^{-1}(K) \cap (\prod\limits_i X_i - S)$ μ-пренебрежимо. С другой стороны, $\varphi^{-1}(K) \cap S$ компактно. Стало быть $\varphi^{-1}(K)$ μ-интегрируемо.

Предложение 5. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$, Y — локально компактные пространства, μ_i — мера на X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, μ — произведение мер μ_i, φ — μ-собственное отображение пространства $\prod\limits_i X_i$ в Y и S_i — носитель меры μ_i.*

a) *Носитель меры $\mathop{\ast}\limits_i \mu_i$ содержится в замыкании множества $\varphi(\prod\limits_i S_i)$.*

b) *Если φ непрерывно и μ_i положительны, то носитель меры $\mathop{\ast}\limits_i \mu_i$ есть замыкание множества $\varphi(\prod\limits_i S_i)$.*

Пусть $S = \prod\limits_i S_i$ есть носитель меры μ. Носитель меры $\mathop{\ast}\limits_i \mu_i$, согласно следствию 3 предложения 2 § 6 главы V, содержится в $\overline{\varphi(S)}$. Если φ непрерывно, а μ_i положительны, то носитель меры $\mathop{\ast}\limits_i \mu_i$ есть $\overline{\varphi(S)}$ (там же, следствие 4 предложения 2).

Следствие. *Если φ непрерывно и меры μ_i имеют компактный носитель, то μ_i свертываемы и $\mathop{\ast}\limits_i \mu_i$ имеет компактный носитель.*

5. *Векторное выражение свертки*

Предложение 6. *Пусть X, Y, Z — локально компактные пространства, φ — непрерывное отображение $X \times Y$ в Z, а λ и μ — меры на X и на Y. Для того чтобы λ и μ были φ-свертываемы, необходимо и достаточно, чтобы отображение $(x, y) \mapsto \varepsilon_{\varphi(x, y)} =$*

$=\varepsilon_x * \varepsilon_y$ *произведения* $X \times Y$ *в* $\mathscr{M}(Z)$ *было скалярно* $(\lambda \otimes \mu)$*-интегрируемо относительно топологии* $\sigma(\mathscr{M}(Z), \mathscr{K}(Z))$, *и тогда*

$$\lambda * \mu = \int_{X \times Y} (\varepsilon_x * \varepsilon_y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y).$$

Утверждение, что λ и μ φ-свертываемы, означает, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(Z)$ функция $f \circ \varphi$ $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, то есть что для любой функции $f \in \mathscr{K}(Z)$ функция $(x, y) \mapsto \langle f, \varepsilon_{\varphi(x, y)} \rangle$ $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, то есть, еще, что отображение $(x, y) \mapsto \varepsilon_{\varphi(x, y)}$ произведения $X \times Y$ в $\mathscr{M}(Z)$ скалярно $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируемо относительно $\sigma(\mathscr{M}(Z), \mathscr{K}(Z))$. Если же это так, то

$$\langle \lambda * \mu, f \rangle = \int f(\varphi(x, y))\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int_{X \times Y} \langle \varepsilon_{\varphi(x, y)}, f \rangle\, d\lambda(x)\, d\mu(y),$$

откуда

$$\lambda * \mu = \int_{X \times Y} \varepsilon_{\varphi(x, y)}\, d\lambda(x)\, d\mu(y).$$

Предложение 7. *Пусть* X, Y, Z — *локально компактные пространства,* φ — *непрерывное отображение* $X \times Y$ *в* Z, *а* λ *и* μ — *меры на* X *и на* Y. *Предположим, что для любого* $x \in X$ *меры* ε_x *и* μ φ*-свертываемы. Для того чтобы* λ *и* μ *были* φ*-свертываемы, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $x \mapsto \varepsilon_x * |\mu|$ *пространства* X *в* $\mathscr{M}(Z)$ *было скалярно* λ*-интегрируемо относительно топологии* $\sigma(\mathscr{M}(Z), \mathscr{K}(Z))$, *и тогда* $\lambda * \mu = \int_X (\varepsilon_x * \mu)\, d\lambda(x)$.

Предположим, что λ и μ φ-свертываемы. Для любой функции $f \in \mathscr{K}(Z)$ функция $f \circ \varphi$ $(|\lambda| \otimes |\mu|)$-интегрируема, и, значит, функция $x \mapsto \int_Y f(\varphi(x, y))\, d|\mu|(y) = \langle f, \varepsilon_x * |\mu| \rangle$ (по условию, определенная для всех $x \in X$) λ-интегрируема; следовательно, $x \mapsto \varepsilon_x * |\mu|$ скалярно λ-интегрируема относительно $\sigma(\mathscr{M}(Z), \mathscr{K}(Z))$, и мы имеем

$$\langle f, \lambda * \mu \rangle = \int_X d\lambda(x) \int_Y f(\varphi(x, y))\, d\mu(y) = \int_X \langle f, \varepsilon_x * \mu \rangle\, d\lambda(x),$$

откуда $\lambda * \mu = \int_X (\varepsilon_x * \mu)\, d\lambda(x)$. Обратно, предположим, что отображение $x \mapsto \varepsilon_x * |\mu|$ пространства X в $\mathscr{M}(Z)$ скалярно λ-интегри-

руемо относительно $\sigma(\mathscr{M}(Z), \mathscr{K}(Z))$. И пусть $f \in \mathscr{K}_+(Z)$. Тогда функция $(x, y) \mapsto f(\varphi(x, y))$ непрерывна, и мы имеем (гл. V, § 8, предложение 1)

$$\int\int^* f(\varphi(x, y))\, d|\lambda|(x)\, d|\mu|(y) =$$
$$= \int^* d|\lambda|(x) \int^* f(\varphi(x, y))\, d|\mu|(y) =$$
$$= \int^* \langle f, \varepsilon_x * |\mu|\rangle\, d|\lambda|(x) < +\infty.$$

Следовательно, $f \circ \varphi$ $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, так что λ и μ φ-свертываемы.

Упражнения

1) Пусть Γ — выступающий замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$. Показать, что отображение $(x, y) \mapsto x + y$ произведения $\Gamma \times \Gamma$ в Γ совершенно. Вывести отсюда, что любые две меры на Γ свертываемы относительно отображения $(x, y) \mapsto x + y$.

2) Пусть G — локально компактная группа и Γ — компактное пространство, полученное присоединением к G бесконечно удаленной точки ω. Продолжим закон композиции из G на Γ, положив $x\omega = \omega x = \omega$ для всех $x \in \Gamma$. Всякой мере μ на Γ соответствует, с одной стороны, ограниченная мера μ_1 на G, а с другой стороны, комплексное число $\mu(\{\omega\})$. Пусть $*$ (соотв. $\hat{*}$) означает свертку, определяемую умножением в G (соотв. Γ). Показать, что $(\mu \mathbin{\hat{*}} \nu)_1 = \mu_1 * \nu_1$ и

$$(\mu \mathbin{\hat{*}} \nu)(\omega) = \mu(\omega)\, \nu_1(G) + \nu(\omega)\, \mu_1(G) + \mu(\omega)\, \nu(\omega),$$

каковы бы ни были меры μ и ν на Γ.

§ 2. Линейные представления групп

1. *Непрерывные линейные представления*

Пусть G — топологическая группа, E — локально выпуклое пространство и U — линейное представление G в E.

Определение 1. (I) *U называется раздельно непрерывным, если $U(s)$ для любого $s \in G$ есть непрерывный эндоморфизм пространства E, а отображение $s \mapsto U(s)x$ пространства G в E для любого $x \in E$ непрерывно.*

(II) *U называется непрерывным, если $(s, x) \mapsto U(s)x$ есть непрерывное отображение $G \times E$ в E.*

(III) *U называется равностепенно непрерывным, если оно непрерывно и множество эндоморфизмов $U(s)$, где s пробегает G, равностепенно непрерывно.*

Замечания. 1) Утверждение, что U раздельно непрерывно, означает, что $s \mapsto U(s)$ есть непрерывное отображение G в пространство $\mathcal{L}(E;\ E)$ непрерывных эндоморфизмов пространства E, наделенное топологией простой сходимости.

2) Соединение следующих трех условий влечет непрерывность U:

a) $U(s)$ непрерывно для каждого $s \in G$; b) существует такая окрестность V элемента e, что $U(V)$ равностепенно непрерывно; c) в E существует такое тотальное множество D, что отображение $s \mapsto U(s)x$ непрерывно для каждого $x \in D$.

В самом деле, в $U(V)$ топология простой сходимости совпадает с топологией простой сходимости на D (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, предложение 5). Следовательно, отображение $(s, x) \mapsto U(s)x$ произведения $V \times E$ в E непрерывно (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, следствие 3 предложения 1). А так как $U(s_0 s)x = U(s_0)(U(s)x)$ при любых $s_0 \in G$, $s \in G$, $x \in E$, то видим, что U непрерывно.

Когда G локально компактна, условия a) и b) равносильны условию:

a′) Для любого компактного подмножества K из G множество $U(K)$ равностепенно непрерывно.

3) Предположим, что U есть непрерывное линейное представление G в E. И пусть $\hat{U}(s)$ для любого $s \in G$ есть непрерывное продолжение $U(s)$ на пополнение $\hat{E}$ пространства E. Тогда $\hat{U}$ есть линейное представление G в $\hat{E}$, удовлетворяющее условиям a) и c) замечания 2, а также, в силу предложения 4 из Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, условию b). Следовательно, $\hat{U}$ есть *непрерывное* линейное представление G в $\hat{E}$.

4) Если E — нормированное пространство, то U называется *изометрией*, если $\|U(s)\| = 1$ для всех $s \in G$. Для этого достаточно, чтобы $\|U(s)\| \leqslant 1$ при любом $s \in G$, ибо тогда

$$1 = \|1\| \leqslant \|U(s)\|\,\|U(s^{-1})\|,$$

откуда $\|U(s)\| = \|U(s^{-1})\| = 1$ для всех $s \in G$.

Предложение 1. *Если G локально компактна, а E бочечно, то всякое раздельно непрерывное линейное представление U группы G в E непрерывно.*

Действительно, для любого компактного подмножества K из G множество $U(K)$ компактно в топологии простой сходимости (замечание 1) и, значит, равностепенно непрерывно (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 2), а тогда применимо замечание 2.

Лемма 1. *Пусть G — локально компактная группа и ρ — такая полунепрерывная снизу конечная функция $\geqslant 0$ на G, что $\rho(st) \leqslant \rho(s)\rho(t)$, каковы бы ни были s и t из G. Тогда ρ ограничена на любом компактном подмножестве из G.*

Существует такое непустое открытое подмножество U из G, что ρ ограничена на U (Общ. топ., гл. IX, 2-е изд., § 5, теорема 2). Пусть K — компактное подмножество из G. Тогда K покрывается конечным числом множеств $s_1U, \ldots, s_nU$. Так как для любого $x \in U$ имеем $\rho(s_ix) \leqslant \rho(s_i)\rho(x)$, то ρ ограничена на каждом s_iU, а значит, и на K.

Лемма 2. *Пусть G — топологическая группа, U — ее линейное представление в нормированное пространство E и A — всюду плотное подмножество из E. Предположим, что $U(s)$ непрерывно для каждого $s \in G$ и что $s \mapsto U(s)x$ для любого $x \in A$ есть непрерывное отображение G в E. Тогда функция $s \mapsto g(s) = \| U(s) \|$ на G полунепрерывна снизу и удовлетворяет неравенству $g(st) \leqslant g(s)g(t)$.*

Пусть B — единичный шар пространства E. Так как $g(s) = \sup\limits_{x \in B \cap A} \| U(s)x \|$, а каждая функция $s \mapsto \| U(s)x \|$ непрерывна на G, то g полунепрерывна снизу. С другой стороны,

$$g(st) = \| U(s)\, U(t) \| \leqslant \| U(s) \|\, \| U(t) \| = g(s)\, g(t).$$

Предложение 2. *Пусть G — локально компактная группа и U — ее линейное представление в нормированное пространство E. Пусть, далее, A есть всюду плотное подмножество из E. Предположим, что $U(s)$ непрерывно для всех $s \in G$ и $s \mapsto U(s)x$ для любого $x \in A$ есть непрерывное отображение G в E. Тогда U непрерывно.*

Действительно, согласно леммам 1 и 2, $\| U(s) \|$ ограничено на любом компактном подмножестве из G, а тогда применимо замечание 2.

2. *Контрагредиентное представление*

Пусть U есть раздельно непрерывное линейное представление G в E и E' — сопряженное к E. Отображение $s \mapsto {}^tU(s)$ есть линейное представление в E' группы G^0, противоположной G; будем называть это представление *транспонированным* к U. Отображение $s \mapsto {}^tU(s^{-1}) = {}^tU(s)^{-1}$ есть линейное представление G в E', называемое *контрагредиентным* к U.

Лемма 3. *Пусть X — локально компактное пространство, Y и Z — топологические пространства, φ — непрерывное отображение $X \times Y$ в Z и φ_x — отображение $y \mapsto \varphi(x, y)$ пространства Y в Z. Если пространства $\mathscr{C}(Y)$ и $\mathscr{C}(Z)$ наделены топологией компактной сходимости, то отображение $(x, f) \mapsto f \circ \varphi_x$ произведения $X \times \mathscr{C}(Z)$ в $\mathscr{C}(Y)$ непрерывно.*

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда X компактно. Пусть $(x_0, f_0) \in X \times \mathscr{C}(Z)$, K — компактное подмножество из Y, $\varepsilon > 0$ и $K' = \varphi(X \times K)$. Поскольку $f_0 \circ \varphi$ равномерно непрерывно на $X \times K$, существует такая окрестность W элемента x_0, что $|f_0(\varphi(x, y)) - f_0(\varphi(x_0, y))| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in W$ и $y \in K$. С другой стороны, если взять $f \in \mathscr{C}(Z)$ так, чтобы $|f(z) - f_0(z)| \leqslant \varepsilon$ для всех $z \in K'$, то $|f(\varphi(x, y)) - f_0(\varphi(x, y))| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$, $y \in K$, и, следовательно, $|f(\varphi(x, y)) - f_0(\varphi(x_0, y))| \leqslant 2\varepsilon$ для всех $x \in W$ и $y \in K$, и лемма доказана.

Вернемся теперь к прежним обозначениям.

Предложение 3. (I) *Если U раздельно непрерывно, то ${}^tU$ раздельно непрерывно при наделении E' слабой топологией $\sigma(E', E)$.*

(II) *Если G локально компактна и U непрерывно, то ${}^tU$ непрерывно при наделении E' топологией компактной сходимости.*

Утверждение (I) очевидно. Утверждение (II) вытекает из леммы 3, если положить в ней $X = G$, $Y = Z = E$, $\varphi(s, x) = U(s)x$.

3. *Пример: линейные представления в пространства непрерывных функций*

Пусть G — дискретная группа, действующая слева в множестве X. Комплексная функция χ на $G \times X$ называется *мультипликатором*, если

$$\chi(e, x) = 1, \text{ каково бы ни было } x \in X; \tag{1}$$

$$\chi(st, x) = \chi(s, tx)\chi(t, x), \text{ каковы бы ни были } s, t \text{ из } G \text{ и } x \in X. \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что

$$\chi(t^{-1}, tx)\chi(t, x) = 1, \text{ каковы бы ни были } t \in G, \quad x \in X, \tag{3}$$

и, в частности, $\chi(t, x) \neq 0$, каковы бы ни были $t \in G$, $x \in X$.

Для любой комплексной функции f, определенной на X, и любого $s \in G$ обозначим через $\gamma_\chi(x)f$ комплексную функцию на X, определенную равенством

$$(\gamma_\chi(s) f)(x) = \chi(s^{-1}, x) f(s^{-1}x). \tag{4}$$

Имеем $\gamma_\chi(e) f = f$ и

$$\begin{aligned}(\gamma_\chi(s)\gamma_\chi(s') f)(x) &= \chi(s^{-1}, x)(\gamma_\chi(s') f)(s^{-1}x) = \\ &= \chi(s^{-1}, x)\chi(s'^{-1}, s^{-1}x) f(s'^{-1}s^{-1}x) = \\ &= \chi((ss')^{-1}, x) f((ss')^{-1}x) = (\gamma_\chi((ss') f)(x);\end{aligned}$$

следовательно, γ_χ *есть линейное представление* группы G. Для $\chi = 1$ приходим снова к эндоморфизмам $\gamma(s)$ (гл. VII, § 1, n° 1, формула (3)).

Предположим теперь, что G и X локально компактны, G действует непрерывно в X, а χ *непрерывно* на $G \times X$. Тогда $\mathscr{C}(X)$ и $\mathscr{K}(X)$ устойчивы относительно всех $\gamma_\chi(s)$, откуда и получаем линейные представления группы G в $\mathscr{C}(X)$ и $\mathscr{K}(X)$, которые мы снова обозначим γ_χ.

Предложение 4. *Линейные представления γ_χ группы G в $\mathscr{C}(X)$ и $\mathscr{K}(X)$ непрерывны.*

Отображение $(s, f) \mapsto (s, \gamma(s)f)$ произведения $G \times \mathscr{C}(X)$ в $G \times \mathscr{C}(X)$ непрерывно (лемма 3). С другой стороны, отображение $(s, f) \mapsto \chi(s, \cdot)f$ произведения $G \times \mathscr{C}(X)$ в $\mathscr{C}(X)$ непрерывно, ибо если s стремится к s_0 в G, то $\chi(s, \cdot)$ стремится к $\chi(s_0, \cdot)$ равномерно на любом компактном подмножестве из X; если, кроме того, f стремится к f_0 в $\mathscr{C}(X)$, то $\chi(s, \cdot)f$ стремится к $\chi(s_0, \cdot)f_0$ равномерно

на любом компактном подмножестве из X, откуда и вытекает наше утверждение. Следовательно, представление γ_χ группы G в $\mathscr{C}(X)$ непрерывно.

Покажем, что и представление γ_χ группы G в $\mathscr{K}(X)$ непрерывно. Как индуктивный предел банаховых пространств, $\mathscr{K}(X)$ бочечно (Топ. вект. простр., гл. III, § 1, следствие 2 предложения 2), и, стало быть, достаточно доказать, что γ_χ раздельно непрерывно (предложение 1). Пусть H — компактное подмножество из X, $s_0 \in G$, V — компактная окрестность элемента s_0 в G и $L = VH$, так что L компактно в X. Для любого $f \in \mathscr{K}(X, H)$ носитель функции $\gamma_\chi(s_0)f$ содержится в L, и

$$\sup_{x \in X} |(\gamma_\chi(s_0)f)(x)| \leqslant \sup_{x \in L} |\chi(s_0^{-1}, x)| \cdot \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

следовательно, $f \mapsto \gamma_\chi(s_0)f$ есть непрерывное линейное отображение пространства $\mathscr{K}(X, H)$ в $\mathscr{K}(X, L)$; отсюда вытекает, что $f \mapsto \gamma_\chi(s_0)f$ есть непрерывное линейное отображение $\mathscr{K}(X)$ в себя (Топ. вект. простр., гл. II, § 2, следствие предложения 1). С другой стороны, топология пространства $\mathscr{K}(X, L)$ индуцируется топологией пространства $\mathscr{C}(X)$. Согласно доказанному выше, отображение $s \mapsto \gamma_\chi(s)f$ окрестности V в $\mathscr{K}(X, L)$ непрерывно. Этим завершается доказательство того, что γ_χ раздельно непрерывно.

Предложение 5. *Предположим, что каждая функция $\chi(s, \cdot)$ ограничена. Тогда γ_χ оставляет устойчивым $\overline{\mathscr{K}(X)}$, и линейное представление γ_χ группы G в $\overline{\mathscr{K}(X)}$ непрерывно.*

То, что γ_χ оставляет устойчивым $\overline{\mathscr{K}(X)}$ и каждое $\gamma_\chi(s)$ *непрерывно* в $\mathscr{K}(X)$, очевидно. С другой стороны, $s \mapsto \gamma_\chi(s)f$ для любого $f \in \mathscr{K}(X)$ есть непрерывное отображение G в $\mathscr{K}(X)$, и тем более в $\overline{\mathscr{K}(X)}$. Следовательно, представление γ_χ в $\overline{\mathscr{K}(X)}$ непрерывно (предложение 2).

4. *Пример: линейные представления в пространства мер*

Пусть всюду G означает локально компактную группу, действующую непрерывно слева в локально компактном пространстве X, а χ — *непрерывный* мультипликатор на $G \times X$. Линейное представление γ_χ группы G в $\mathscr{K}(X)$ допускает контрагредиентное

представление в $\mathscr{M}(X)$ (которое мы снова обозначим через γ_χ), определяемое следующей формулой (где $\mu \in \mathscr{M}(X)$, $f \in \mathscr{K}(X)$):

$$\langle \gamma_\chi(s)\mu, f\rangle = \langle \mu, \gamma_\chi(s^{-1}) f\rangle = \langle \chi(s, \cdot)\cdot\mu, \gamma(s^{-1}) f\rangle = \\ = \langle \gamma(s)(\chi(s, \cdot)\cdot\mu), f\rangle,$$

откуда

$$\gamma_\chi(s)\mu = \gamma(s)(\chi(s, \cdot)\cdot\mu) = (\gamma(s)\chi(s, \cdot))\cdot(\gamma(s)\mu).$$

Заметим, что

$$(\gamma(s)\chi(s, \cdot))(x) = \chi(s, s^{-1}x).$$

Линейное представление γ_χ группы G в $\mathscr{C}(X)$ допускает контрагредиентное представление в пространство $\mathscr{C}'(X)$ мер на X с компактным носителем; это представление мы снова обозначим через γ_χ; эндоморфизмы $\gamma_\chi(s)$ пространства $\mathscr{C}'(X)$ являются сужением эндоморфизмов $\gamma_\chi(s)$ пространства $\mathscr{M}(X)$.

Предложение 6. *При наделении $\mathscr{M}(X)$ (соотв. $\mathscr{C}'(X)$) топологией равномерной сходимости на всех компактных подмножествах из $\mathscr{K}(X)$ (соотв. $\mathscr{C}(X)$) линейное представление γ_χ группы G в $\mathscr{M}(X)$ (соотв. $\mathscr{C}'(X)$) непрерывно.*

Предложение 7. *Предположим, что каждая функция $\chi(s, \cdot)$ ограничена. Тогда γ_χ оставляет устойчивым $\mathscr{M}^1(X)$, и при наделении $\mathscr{M}^1(X)$ топологией равномерной сходимости на всех компактных подмножествах из $\overline{\mathscr{K}(X)}$ линейное представление группы G в $\mathscr{M}^1(X)$ непрерывно.*

Эти предложения вытекают из предложений 3, 4, 5.

5. *Пример: линейные представления в пространства L^p*

Пусть всюду G — локально компактная группа, действующая непрерывно слева в локально компактном пространстве X. И пусть β — положительная мера на X с носителем X. Предположим, что на $G \times X$ существует такая *непрерывная* функция $\chi > 0$, что для любого $s \in G$ справедливо равенство

$$\gamma(s)\beta = \chi(s^{-1}, \cdot)\cdot\beta$$

(из которого, в частности, следует, что β квазиинвариантна относительно G). *Тогда χ есть мультипликатор*. Действительно, пусть s, $t \in G$; имеем

$$\gamma(s)\gamma(t)\beta = \gamma(s)(\chi(t^{-1}, \cdot)\cdot\beta) = (\gamma(s)\chi(t^{-1}, \cdot))\cdot(\gamma(s)\beta) =$$
$$= (\gamma(s)\chi(t^{-1}, \cdot))\cdot\chi(s^{-1}, \cdot)\cdot\beta,$$
$$\gamma(st)\beta = \chi(t^{-1}s^{-1}, \cdot)\cdot\beta;$$

следовательно,

$$\chi(t^{-1}, s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x) = \chi(t^{-1}s^{-1}, x)$$

локально β-почти всюду, а следовательно, и всюду, поскольку χ непрерывна, а β имеет носителем X.

Пусть $p \in [1, +\infty[$. Для любого $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$ и любого $s \in G$ обозначим через $\gamma_{\chi, p}(s) f$ функцию на X, определенную равенством

$$(\gamma_{\chi, p}(s) f)(x) = \chi(s^{-1}, x)^{1/p} f(s^{-1}x).$$

Имеем

$$\int^* |\chi(s^{-1}, x)^{1/p} f(s^{-1}x)|^p \, d\beta(x) =$$
$$= \int^* |f(s^{-1}x)|^p \chi(s^{-1}, x)\, d\beta(x) = \int |f(x)|^p \, d\beta(x),$$

и, значит, $\gamma_{\chi, p}(s) f \in \mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$. Таким образом, $\gamma_{\chi, p}(s)$ есть *изометрический* эндоморфизм пространства $\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$ и определяет факторизацией изометрический эндоморфизм пространства $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$, обозначаемый снова $\gamma_{\chi, p}(s)$. С другой стороны, очевидно, $\chi^{1/p}$ — мультипликатор, и следовательно, согласно изложенному в n° 3, $\gamma_{\chi, p}$ есть линейное представление группы G в $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$.

Предложение 8. *Линейное представление $\gamma_{\chi, p}$ группы G в $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$ непрерывно и изометрично.*

Пусть $f \in \mathscr{K}(X)$. Когда s стремится к s_0 в G, $\gamma_{\chi, p}(s) f$ стремится к $\gamma_{\chi, p}(s_0) f$ в $\mathscr{K}(X)$, а значит, и в $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$. А так как $\gamma_{\chi, p}(s)$ — изометрии, то предложение 8 получается применением замечания 2 n° 1.

По поводу случая, когда χ не предполагается непрерывной, см. упражнение 13 § 4.

Предложение 9. *Предположим, что каждая функция* $\chi(s, \cdot)$ *ограничена. Тогда* γ_χ *оставляет устойчивым* $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$, *а линейное представление* γ_χ *группы* G *в* $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$ *непрерывно.*

Пусть $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$. Имеем

$$\int^* |\chi(s^{-1}, x) f(s^{-1}x)|^p d\beta(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in X} \chi(s^{-1}, x)^{p-1} \int^* |f(s^{-1}, x)|^p \chi(s^{-1}, x)\, d\beta(x) =$$

$$= \sup_{x\in X} \chi(s^{-1}, x)^{p-1} \int |f(x)|^p d\beta(x),$$

следовательно, $\gamma_\chi(s) f \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$, и

$$\|\gamma_\chi(s)\| \leqslant \sup_{x\in X} \chi(s^{-1}, x)^{1/q},$$

где q обозначает показатель, сопряженный с p. Если $f \in \mathcal{K}(X)$, то $\gamma_\chi(s) f$ стремится к $\gamma_\chi(s_0) f$ в $\mathcal{K}(X)$, а значит, и в $\mathcal{L}^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$, когда s стремится к s_0. Следовательно, представление γ_χ группы G в $L^p_{\mathbf{C}}(X, \beta)$ непрерывно (предложение 2).

Свойства, аналогичные изложенным в n°n° 3, 4, 5, имеют место и в случае, когда G действует справа в X.

В частности, рассматривая G как группу левых или правых переносов в себе самой и принимая $\chi = 1$, получим *левые* и *правые регулярные представления* группы G в $\mathcal{C}(G)$, $\mathcal{K}(G)$, $\overline{\mathcal{K}(G)}$, $\mathcal{C}'(G)$, $\mathcal{M}(G)$, $\mathcal{M}^1(G)$. Взяв в качестве β левую (соотв. правую) меру Хаара на G и приняв $\chi = 1$, получим *левое* (соотв. *правое*) *регулярное представление* G в $L^p_{\mathbf{C}}(G, \beta)$.

6. Продолжение линейного представления группы G на меры на G

Пусть G — локально компактная группа, E — локально выпуклое пространство и U — линейное представление G в E. Предположим, что U непрерывно, а E квазиполно. Тогда для любой меры $\mu \in \mathcal{C}'(G)$ имеем $\int_G U(s)\, d\mu(s) \in \mathcal{L}(E; E)$ (гл. VI, § 1,

n° 7). Мы положим $U(\mu) = \int\limits_G U(s) d\mu(s)$. Наделим $\mathscr{C}'(G)$ топологией компактной сходимости на $\mathscr{C}(G)$. Отображение $(\mu, x) \longmapsto U(\mu)x$ произведения $\mathscr{C}'(G) \times E$ в E *гипонепрерывно* относительно равностепенно непрерывных подмножеств из $\mathscr{C}'(G)$ и компактных подмножеств из E; в частности, отображение $\mu \longmapsto U(\mu)$ пространства $\mathscr{C}'(G)$ в $\mathscr{L}(E; E)$ (наделенное топологией компактной сходимости) непрерывно (там же, предложение 16).

Чтобы иметь возможность применять в дальнейшем эти результаты, отметим, что если X — локально компактное пространство, то $\mathscr{C}(X)$, наделенное топологией компактной сходимости, полно (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 1, следствие 3 теоремы 2). С другой стороны, $\mathscr{K}(X)$ бочечно, и, значит, его сопряженное $\mathscr{M}(X)$, наделенное топологией компактной сходимости на $\mathscr{K}(X)$, квазиполно (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, следствие 2 теоремы 4). Разумеется, $\overline{\mathscr{K}(X)}$ полно в топологии, определяемой его нормой, и, стало быть, его сопряженное $\mathscr{M}^1(X)$ квазиполно в топологии компактной сходимости на $\overline{\mathscr{K}(X)}$ (там же).

Предположим теперь, что U — непрерывное линейное представление локально компактной группы G в *банахово пространство* E. Положим $g(s) = \|U(s)\|$ для каждого $s \in G$. Тогда, если μ — такая мера на G, что g μ-интегрируема, то $\int\limits_G U(s)\, d\mu(s) \in \mathscr{L}(E; E)$ и $\left\| \int\limits_G U(s)\, d\mu(s) \right\| \leqslant \int g(s)\, d|\mu|(s)$ (гл. VI, § 1, n° 7, замечание 1). Будем снова полагать $U(\mu) = \int\limits_G U(s)\, d\mu(s)$.

7. *Соотношения между эндоморфизмами $U(\mu)$ и эндоморфизмами $U(s)$*

Лемма 4. *Пусть T — локально компактное пространство, a — точка из T, M — подмножество из $\mathscr{M}(T)$ и $\mathfrak{F}$ — фильтр в M. Предположим, что*:

(I) *для любого компактного подмножества K из T семейство чисел $|\mu|(K)$ $(\mu \in M)$ ограничено*;

(II) $\lim\limits_{\mu, \mathfrak{F}} |\mu|(K) = 0$ *для всякого компактного подмножества* K *из* $T - \{a\}$;

(III) *в* T *существует такая компактная окрестность* V *точки* a, *что* $\lim\limits_{\mu, \mathfrak{F}} \mu(V) = 1$.

Тогда фильтр $\mathfrak{F}$ *сходится к* ε_a *в* $\mathscr{M}(T)$, *наделенном топологией компактной сходимости на* $\mathscr{K}(T)$.

В силу условия (I), M есть равностепенно непрерывное подмножество из $\mathscr{M}(T)$, поскольку оно широко ограничено и $\mathscr{K}(T)$ бочечно (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 2). Следовательно, достаточно (Общ. топ., гл. X, 2-е изд., § 2, теорема 1) доказать, что если $f \in \mathscr{K}(T)$, то $\lim\limits_{\mu, \mathfrak{F}} \mu(f) = f(a)$. Пусть K — объединение V и носителя функции f; тогда

$$|\mu(K) - \mu(V)| = |\mu(K - V)| \leqslant |\mu|(K'),$$

где K' — замыкание множества $K - V$; а так как K' компактно и не содержит a, то заключаем, что $\lim\limits_{\mu, \mathfrak{F}} \mu(K) = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ и W — такая открытая окрестность точки a в K, что $|f(t) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in W$; можно написать

$$\mu(f) - f(a) = f(a)(\mu(K) - 1) + \int\limits_K (f(t) - f(a))\, d\mu(t);$$

далее, интеграл по K может быть записан в виде суммы аналогичных интегралов по W и по $K - W$; полагая $C = \sup |f|$, получим, следовательно,

$$|\mu(f) - f(a)| \leqslant$$
$$\leqslant C|\mu(K) - 1| + \varepsilon \cdot |\mu|(K) + 2C \cdot |\mu|(K - W).$$

А поскольку первый и третий члены правой части стремятся к 0 по $\mathfrak{F}$, это показывает, что $\lim\limits_{\mu, \mathfrak{F}} \mu(f) = f(a)$.

Следствие 1. *Сохраняя предположения леммы 4, допустим, кроме того, что в* T *существует компактное подмножество* K_0, *содержащее носители всех мер* $\mu \in M$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *сходится к* ε_a *также в* $\mathscr{C}'(T)$, *наделенном топологией компактной сходимости на* $\mathscr{C}(T)$.

Действительно, отображение сужения $\mathscr{C}(T)$ в $\mathscr{C}(K_0)$ непрерывно; следовательно, если H — компактное подмножество из $\mathscr{C}(T)$, сужения на K_0 функций из H образуют компактное подмножество в $\mathscr{C}(K_0)$. Тогда достаточно применить лемму 4, заменив в ней T на K_0.

Следствие 2. *Пусть, в предположениях следствия* 1, f — *непрерывное отображение пространства* T *в квазиполное локально выпуклое пространство* E. *Тогда*

$$\lim_{\mu, \mathfrak{F}} \int f(t)\, d\mu(t) = f(a).$$

Это вытекает из только что установленного следствия 1 и предложения 14 § 1 главы VI.

Следствие 3. *Пусть* G — *локально компактная группа*, E — *квазиполное локально выпуклое пространство и* U — *непрерывное линейное представление* G *в* E. *Пусть, далее,* β — *положительная мера на* G, a — *элемент из* G *и* $\mathfrak{B}$ — *базис фильтра окрестностей точки* a, *образованный компактными окрестностями. Пусть, наконец,* f_V *для любого* $V \in \mathfrak{B}$ *есть непрерывная функция* $\geqslant 0$ *на* G, *имеющая компактный носитель, содержащийся в* V, *и такая, что* $\int f_V d\beta = 1$. *Тогда для любого* $x \in E$ *имеем*

$$U(a)\,x = \lim_V U(f_V \cdot \beta)\,x,$$

где предел берется по фильтру сечений базиса $\mathfrak{B}$.

Отображение $s \mapsto U(s)\,x$ пространства G в E непрерывно. В силу следствия 2, имеем $U(a)\,x = \lim\limits_V \int (U(s)\,x) \cdot f_V(s)\, d\beta(s)$ по фильтру сечений базиса $\mathfrak{B}$, то есть $U(a)\,x = \lim\limits_V U(f_V \cdot \beta)\,x$.

Предложение 10. *Пусть* G — *локально компактная группа,* E — *квазиполное локально выпуклое пространство,* U — *непрерывное линейное представление* G *в* E *и* β — *положительная мера на* G *с носителем* G.

(I) *Векторы* $U(f \cdot \beta)x$, *где* f *пробегает* $\mathscr{K}(G)$, *а* x *пробегает* E, *всюду плотны в* E.

(II) *Пусть* F — *замкнутое векторное подпространство пространства* E. *Если* F *устойчиво относительно* U, *то* $U(\mu)(F) \subset F$

для любого $\mu \in \mathscr{C}'(G)$. *Обратно, если* $U(f\cdot\beta)(F) \subset F$ *для любого* $f \in \mathscr{K}(G)$, *то* F *устойчиво относительно* U.

Первая часть утверждения (II) очевидна, поскольку сужения $U(s)$ на F ($s \in G$) определяют непрерывное линейное представление группы G в квазиполное локально выпуклое пространство F. Вторая часть утверждения (II) и утверждение (I) вытекают из следствия 3 леммы 4.

Упражнения

1) Пусть $(G_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство локально компактных групп, из которых все, за исключением конечного числа, компактны. Пусть, далее, U_ι — непрерывное линейное представление G_ι в локально выпуклое пространство E_ι и пусть $U(s)$ для любого $s=(s_\iota)\in G=\prod_\iota G_\iota$ означает эндоморфизм $(x_\iota)\longmapsto(U_\iota(s)\,x_\iota)$ пространства $E=\prod_\iota E_\iota$. Показать, что U — непрерывное линейное представление G в E. Пусть E' — топологическая сумма пространств E_ι и $V(s)$ — сужение $U(s)$ на E'. Показать, что V — непрерывное линейное представление G в E'.

2) Пусть U_1 (соотв. U_2) — непрерывное линейное представление локально компактной группы G (соотв. H) в локально выпуклое пространство E (соотв. F). Для всех $u \in \mathscr{L}(E;\ E)$, $x\in G$, $y \in H$ положим

$$V(x,\ y)\cdot u = U_2(y)\circ u\circ U_1(x).$$

Показать, что отображение $(x,\ y)\longmapsto V(x,\ y)$ есть непрерывное линейное представление группы $G^0\times H$ в пространство $\mathscr{L}(E;\ F)$, наделенное топологией компактной сходимости. [Использовать предложение 9 из Топ. вект. простр., гл. III, § 4 и то, что $U_1(K)$ равностепенно непрерывно для каждого компактного множества K в G.]

*3) Пусть G — локально компактная группа, U — ее непрерывное линейное представление в локально выпуклое пространство E и E' — сопряженное к E, наделенное сильной топологией.

a) Показать, что ${}^tU(K)$ равностепенно непрерывно для любого компактного подмножества K из G.

b) Пусть F — множество тех $a'\in E'$, для которых отображение $s\longmapsto {}^tU(s)a'$ группы G в E' непрерывно. Показать, что F есть замкнутое векторное подпространство пространства E', устойчивое относительно ${}^tU(G)$, и что представление, получаемое сужением на F представления, контрагредиентного U, непрерывно.

c) Предположим, что E квазиполно, и пусть α — левая мера Хаара на G. Показать, что $f\longmapsto U(f\cdot\alpha)$ есть непрерывное отображение пространства $\mathscr{K}(G)$ в $\mathscr{L}(E;\ E)$, наделенное топологией ограниченной сходимости. [Использовать предложение 17 § 1 главы VI.] Показать, что F слабо плотно в E'. [Доказать, что ${}^tU(f)a'\in F$ для любого $a'\in E'$

и любого $f \in \mathscr{K}(G)$, затем использовать следствие 3 леммы 4.] Вывести отсюда, что если E полурефлексивно, то контрагредиентное U представление в E', наделенное сильной топологией, непрерывно.

d) Показать, что если в качестве U взять левое регулярное представление группы G в $L^1(G, \alpha)$ (где α по-прежнему — левая мера Хаара на G), то F будет подпространством пространства $E' = L^\infty(G, \alpha)$, состоящим из всех равномерно непрерывных функций.

4) Пусть H — гильбертово пространство. Непрерывное представление U группы G в H называется *унитарным*, если эндоморфизмы $U(s)$ унитарны для всех $s \in G$. Пусть μ^* для любой меры $\mu \in \mathscr{M}(G)$ означает меру, сопряженную к $\check{\mu}$. Показать, что если $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, то $U(\mu^*) = U(\mu)^*$.

5) Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа и U — непрерывное линейное представление H в локально выпуклое пространство E. Пусть, далее, K — компактное подмножество из G и $\mathscr{K}^U(K)$ — пространство всех непрерывных функций на G со значениями в E и носителем, содержащимся в KH, удовлетворяющих условию $f(xh) = U(h)^{-1}f(x)$ $(x \in G,\ h \in H)$. Пусть, наконец, $\mathscr{K}^U$ — объединение всех $\mathscr{K}^U(K)$, наделенное индуктивным пределом топологий равномерной сходимости на K в каждом из пространств $\mathscr{K}^U(K)$. Для $f \in \mathscr{K}^U$ и $s \in G$ определим $V(s)f \in \mathscr{K}^U$ формулой

$$(V(s)f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Показать, что V — непрерывное линейное представление группы G в $\mathscr{K}^U$.

6) Пусть G — локально компактная группа, β — ненулевая положительная относительно инвариантная мера на G, а χ и χ' — ее левый и правый мультипликаторы. Для $f \in L^p_{\mathbf{C}}(G, \beta)$ и $s \in G$ положим

$$(U(s)f)(x) = \chi(s)^{-1/p} f(s^{-1}x),$$
$$(V(s)f)(x) = \chi'(s)^{-1/p} f(xs),$$
$$(Sf)(x) = (\chi\chi')(x)^{-1/p}\, \overline{f(x^{-1})}.$$

Тогда U и V являются линейными представлениями группы G, и

$$S^2 = 1, \quad \|U(s)\| = \|V(s)\| = 1,$$
$$U(s)V(t) = V(t)U(s),$$
$$SU(s)S = V(s),$$

каковы бы ни были s, t из G.

7) Пусть E — гильбертово пространство, имеющее ортонормальный базис $(e_s)_{s \in \mathbf{R}}$, равномощный $\mathbf{R}$. Для любого $s \in \mathbf{R}$ через $U(s)$ обозначим изометрию пространства E, определяемую условием $U(s) \cdot e_t = e_{s+t}$ для всех $t \in \mathbf{R}$; линейное представление $s \longmapsto U(s)$ группы $\mathbf{R}$

в E не будет непрерывно, хотя множество всех $U(s)$ и равностепенно непрерывно.

8) Пусть G — коммутативная локально компактная группа, μ — мера Хаара на G, f — конечная числовая μ-измеримая функция на G. Предположим, что числовая функция

$$s \longmapsto f(sx) - f(x)$$

непрерывна на G для всех $s \in G$. Показать, что тогда f непрерывна. [Рассуждать от противного; предполагая функцию f разрывной в некоторой точке $x_0 \in G$, показать сначала, что в G существует такой фильтр $\mathfrak{F}$ с пределом e, что

$$\lim_{\mathfrak{F},\, s} |f(sx_0)| = +\infty,$$

и вывести отсюда, что $\lim\limits_{\mathfrak{F},\, s} |f(sx)| = +\infty$ также для *всех* $x \in G$. Положив $g = |f|/(1+|f|)$, вывести из последнего результата противоречие с тем, что для любого компактного $K \subset G$

$$\lim_{\mathfrak{F},\, s} \int_K |g(sx) - g(x)|\, d\mu(x) = 0.]$$

9) Пусть G — локально компактная группа, μ — левая мера Хаара на G и f — μ-интегрируемая функция. Пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра, состоящий из μ-интегрируемых множеств меры > 0 и имеющий пределом e. Для любого $B \in \mathfrak{B}$ положим $f_B(t) = \dfrac{1}{\mu(B)} \displaystyle\int_B f(st)\, d\mu(s)$.

Показать, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}} \displaystyle\int_A f_B(t)\, d\mu(t) = \int_A f(t)\, d\mu(t)$ для любого интегрируемого подмножества A из G.

10) Пусть G — локально компактная группа, E — отделимое локально выпуклое пространство, E' — его сопряженное и U — линейное представление G в E, непрерывное в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ пространства E. Предположим, что E квазиполно относительно $\sigma(E, E')$, так что $U(\mu)$ определено для каждой меры $\mu \in \mathscr{C}'(G)$. Показать, что билинейное отображение $(\mu, x) \longmapsto U(\mu)\cdot x$ гипонепрерывно относительно равностепенно непрерывных подмножеств из $\mathscr{C}'(G)$.

§ 3. Свертка мер на группах

1. *Алгебры мер*

Пусть G — локально компактная группа. Условимся раз и навсегда называть меры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ на G свертываемыми, если они свертываемы относительно отображения

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 x_2 \ldots x_n;$$

при помощи именно этого отображения будет всегда преобразовываться свертка $\mathop{\ast}\limits_{i} \mu_i$. Для всех $s \in G$, $t \in G$ имеем

$$\varepsilon_s * \varepsilon_t = \varepsilon_{st}. \tag{1}$$

Для всех $s \in G$ и $\mu \in \mathscr{M}(G)$ имеем

$$\varepsilon_s * \mu = \gamma(s)\mu, \tag{2}$$

$$\mu * \varepsilon_s = \delta(s^{-1})\mu, \tag{3}$$

согласно примеру 3 n° 1 § 1. Если G коммутативна, то утверждение, что μ_1 и μ_2 свертываемы, равносильно утверждению, что μ_2 и μ_1 свертываемы, и тогда $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$. Если же G некоммутативна, то может случиться, что μ_1 и μ_2 свертываемы, а μ_2 и μ_1 — нет (упражнение 12).

Предложение 1. *Пусть G — локально компактная группа и λ, μ, ν — ненулевые меры на G.*

(I) *Если λ, μ, ν свертываемы, то то же верно и для λ и μ, $|\lambda| * |\mu|$ и ν, μ и ν, λ и $|\mu| * |\nu|$, и*

$$\lambda * \mu * \nu = (\lambda * \mu) * \nu = \lambda * (\mu * \nu).$$

(II) *Если λ и μ, как и $|\lambda| * |\mu|$ и ν, свертываемы, то λ, μ, ν свертываемы. То же справедливо, если μ и ν, как и λ и $|\mu| * |\nu|$, свертываемы.*

Это вытекает из предложения 1 § 1.

Могут существовать такие меры λ, μ, ν на G, что все свертки $\lambda * \mu$, $(\lambda * \mu) * \nu$, $\mu * \nu$, $\lambda * (\mu * \nu)$ определены и, однако, $(\lambda * \mu) * \nu \neq \neq \lambda * (\mu * \nu)$ (см. упражнение 4).

Пусть ρ — такая полунепрерывная снизу конечная функция > 0 на G, что $\rho(st) \leqslant \rho(s)\rho(t)$, каковы бы ни были s, t из G. Обозначим через $\mathscr{M}^\rho(G)$ векторное пространство тех мер λ на G, для которых ρ λ-интегрируема, и пусть $\|\lambda\|_\rho$ (или просто $\|\lambda\|$) — норма $\int_G \rho(s)\, d|\lambda|(s)$ на этом пространстве. При $\rho = 1$ вновь получаем множество $\mathscr{M}^1(G)$ всех ограниченных мер на G.

Предложение 2. (I) *Любые два элемента из $\mathscr{M}^\rho(G)$ свертываемы.*

(II) *Относительно свертки и нормы $\|\lambda\|$, $\mathscr{M}^\rho(G)$ есть полная нормированная алгебра, обладающая единичным элементом ε_e.*

(III) *$\mathscr{C}'(G)$ есть подалгебра алгебры $\mathscr{M}^\rho(G)$.*

Пусть λ, $\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$; покажем, что λ и μ свертываемы. Пусть $f \in \mathscr{K}_+(G)$. Так как $\rho > 0$ и полунепрерывна снизу, то существует такая постоянная $k > 0$, что $f \leqslant k\rho$. Тогда

$$\int^* f(st)\,d|\lambda|(s)\,d|\mu|(t) \leqslant k\int^* \rho(st)\,d|\lambda|(s)\,d|\mu|(t) \leqslant$$
$$\leqslant k\int^* \rho(s)\rho(t)\,d|\lambda|(s)\,d|\mu|(t) =$$
$$= k\left(\int^* \rho(s)\,d|\lambda|(s)\right)\left(\int^* \rho(t)\,d|\mu|(t)\right)$$

(гл. V, § 8, предложение 5). Следовательно, f $(\lambda\otimes\mu)$-интегрируема, так что λ и μ свертываемы. С другой стороны, используя сказанное в главе V (предложение 2 § 2, предложение 2 § 6, предложение 5 § 8) и то, что $(s, t) \mapsto \rho(s)\rho(t)$ полунепрерывно снизу на $G \times G$, получаем

$$\int_G^* \rho(s)\,d|\lambda*\mu|(s) = \overline{\int_G}^* \rho(s)\,d|\lambda*\mu|(s) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\int_{G\times G}}^* \rho(st)\,d|\lambda|(s)\,d|\mu|(t) \leqslant \overline{\int_{G\times G}}^* \rho(s)\rho(t)\,d|\lambda|(s)\,d|\mu|(t) =$$
$$= \int_{G\times G}^* \rho(s)\rho(t)\,d|\lambda|(s)\,d|\mu|(t) = \|\lambda\|\cdot\|\mu\|.$$

Мы видим, что $\lambda*\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$ и $\|\lambda*\mu\| \leqslant \|\lambda\|\cdot\|\mu\|$. Учитывая предложение 1, заключаем, что $\mathscr{M}^\rho(G)$ есть алгебра. Отображение $\lambda \mapsto \rho\cdot\lambda$ есть изометрическое линейное отображение θ пространства $\mathscr{M}^\rho(G)$ в $\mathscr{M}^1(G)$; если $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, то $1/\rho$, которая локально ограничена и полунепрерывна сверху, локально μ-интегрируема, а ρ $(1/\rho)\cdot\mu$-интегрируема, и, значит, $(1/\rho)\cdot\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$; это доказывает, что θ сюръективно; следовательно, $\mathscr{M}^\rho(G)$ есть полная нормированная алгебра. Наконец, ясно, что ε_e есть единичный элемент алгебры $\mathscr{M}^\rho(G)$, а $\mathscr{C}'(G)$ — ее подалгебра (§ 1, следствие предложения 5).

При $\rho = 1$ предложение 2, (I) и (II), вытекает также из предложения 2 § 1.

Предложение 3. *Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — меры на G. Если все μ_i, кроме, быть может, одной, имеют компактный носитель, то μ_i свертываемы.*

Действительно, пусть S_i — носитель меры μ_i и S_i компактны для всех $i \neq i_0$. Пусть, далее, K — компактное подмножество из G. Множество тех $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_i S_i$, для которых $x_1x_2 \ldots x_n \in K$, компактно, так как условия $x_i \in S_i$ для всех i и $x_1x_2 \ldots x_n \in K$ влекут

$$x_{i_0} \in S_{i_0-1}^{-1} \ldots S_1^{-1} K S_n^{-1} \ldots S_{i_0+1}^{-1}.$$

Следовательно, μ_i свертываемы (§ 1, предложение 4).

Предложение 4. *Отображение* $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda * \mu$ (соотв. $(\lambda, \mu) \mapsto \mu * \lambda$), *где* $\lambda \in \mathscr{C}'(G)$, $\mu \in \mathscr{M}(G)$, *определяет в* $\mathscr{M}(G)$ *структуру левого* (соотв. правого) *модуля над алгеброй* $\mathscr{C}'(G)$.

Это вытекает из предложений 1 и 3.

Предложение 5. *Пусть* λ — *левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара на* G *и* $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$. *Тогда* μ *и* λ (соотв. λ *и* μ) *свертываемы и* $\mu * \lambda = \|\mu\| \lambda$ (соотв. $\lambda * \mu = \|\mu\| \lambda$).

Можно предполагать $\mu \geqslant 0$. Пусть $f \in \mathscr{K}_+(G)$. Если λ — левая мера Хаара, то

$$\int^* d\mu(x) \int^* f(xy)\, d\lambda(y) = \int^* d\mu(x) \int f(y)\, d\lambda(y) = \lambda(f) \|\mu\|,$$

а значит, функция $(x, y) \mapsto f(xy)$ $(\mu \otimes \lambda)$-интегрируема и ее интеграл относительно $\mu \otimes \lambda$ равен $\lambda(f)\|\mu\|$. Так же рассуждаем в случае, когда λ — правая мера Хаара.

Предложение 6. *Пусть* μ *и* ν — *свертываемые меры на* G *и* χ — *непрерывное представление* G *в* $\mathbf{C}^*$. *Тогда* $\chi \cdot \mu$ *и* $\chi \cdot \nu$ *свертываемы и* $(\chi \cdot \mu) * (\chi \cdot \nu) = \chi \cdot (\mu * \nu)$.

Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Тогда $f\chi \in \mathscr{K}(G)$, и, значит, функция

$$(x, y) \mapsto f(xy)\chi(xy) = f(xy)\chi(x)\chi(y)$$

на $G \times G$ интегрируема относительно $\mu \otimes \nu$; следовательно, функция $(x, y) \mapsto f(xy)$ интегрируема относительно $(\chi \cdot \mu) \otimes (\chi \cdot \nu)$, а значит, $\chi \cdot \mu$ и $\chi \cdot \nu$ свертываемы. Кроме того,

$$\langle \chi \cdot \mu * \chi \cdot \nu, f \rangle = \int f(xy)\chi(x)\chi(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) =$$

$$= \int (f\chi)(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \langle \mu * \nu, \chi f \rangle,$$

откуда $(\chi \cdot \mu) * (\chi \cdot \nu) = \chi \cdot (\mu * \nu)$.

Предложение 7. *Пусть G и G' — локально компактные группы, u — непрерывное представление G в G' и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — ненулевые меры на G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(I) *u μ_i-собственно при любом i и меры $u(|\mu_i|)$ свертываемы;*

(II) *меры μ_i свертываемы, а u собственно относительно $\mathop{\ast}\limits_{i}(|\mu_i|)$.*

Если эти условия выполнены, то

$$\mathop{\ast}\limits_{i} u(\mu_i) = u(\mathop{\ast}\limits_{i} \mu_i).$$

Это вытекает из следствия предложения 1 § 1.

Следствие. *Пусть G — локально компактная группа и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — меры на G. Для того чтобы последовательность $(\mu_i)_{1\leq i\leq n}$ была свертываема, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(\check{\mu}_{n-i})_{0\leq i\leq n-1}$ обладала этим свойством, и тогда*

$$(\mu_1 * \ldots * \mu_n)^{\vee} = \check{\mu}_n * \ldots * \check{\mu}_1.$$

Это вытекает из предложения 7, если рассмотреть изоморфизм $x \longmapsto x^{-1}$ группы G на противоположную группу.

2. *Случай группы, действующей в пространстве*

Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует слева непрерывно по закону

$$(s, x) \longmapsto s\cdot x$$

локально компактная группа G. Меры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ на G и мера ν на X будут называться свертываемыми, если они свертываемы относительно отображения $(s_1, \ldots, s_n, x) \longmapsto s_1 \ldots s_n x$ произведения $G^n \times X$ в X, и под их сверткой будет пониматься свертка в смысле этого отображения.

Если $s \in G$ и $x \in X$, то

$$\varepsilon_s * \varepsilon_x = \varepsilon_{sx}. \tag{4}$$

Если $s \in G$ и $\mu \in \mathscr{M}(X)$, то, согласно примеру 3 n° 1 § 1,

$$\varepsilon_s * \mu = \gamma(s)\,\mu. \tag{5}$$

Предложение 8. *Пусть* μ — *мера на* G *и* ν — *мера на* X.

(I) *Если* μ *имеет компактный носитель, то* μ *и* ν *свертываемы.*

(II) *Если* ν *имеет компактный носитель, а* G *действует совершенно в* X, *то* μ *и* ν *свертываемы.*

Это следует из предложения 4 § 1.

Предложение 9. *Относительно свертки,* $\mathscr{M}^1(X)$ *есть левый модуль над* $\mathscr{M}^1(G)$, *а* $\mathscr{M}(X)$ *и* $\mathscr{C}'(X)$ — *левые модули над* $\mathscr{C}'(G)$.

Это вытекает из только что доказанного предложения 8 и предложений 1, 3 и следствия предложения 5 § 1.

Предложение 10. *Пусть* μ — *мера на* G, ν — *мера на* X, *причем* μ *и* ν *свертываемы. Предположим, что существует такая положительная мера* β *на* X, *что* $\gamma(s)\nu$ *есть базис меры* β *при любом* $s \in G$. *Тогда* $\mu * \nu$ *есть базис меры* β.

Пусть K — компактное β-пренебрежимое подмножество из X. Тогда $K\,\gamma(s)$ $|\nu|$-пренебрежимо при любом $s \in G$. Но

$$|\mu| * |\nu| = \int_G (\varepsilon_s * |\nu|)\, d|\mu|(s)$$

(§ 1, предложение 7), и отображение $s \mapsto \varepsilon_s * |\nu|$ широко непрерывно (§ 2, предложение 6). Поэтому K, согласно теореме 1 § 3 главы V, $|\mu| * |\nu|$-пренебрежимо. Следовательно, $|\mu| * |\nu|$ есть базис меры β (гл. V, § 5, n° 5, замечание).

3. Свертка и линейные представления

Предложение 11. *Пусть* G — *локально компактная группа,* E — *квазиполное локально выпуклое пространство и* U — *непрерывное представление* G *в* E.

(I) *Если* $\lambda \in \mathscr{C}'(G)$, $\mu \in \mathscr{C}'(G)$, *то* $U(\lambda * \mu) = U(\lambda)U(\mu)$.

(II) *Предположим, что* E — *банахово пространство, и пусть* $\rho(s) = \|U(s)\|$ *для всех* $s \in G$. *Если* $\lambda \in \mathscr{M}^\rho(G)$, $\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$, *то* $U(\lambda * \mu) = U(\lambda)U(\mu)$.

Пусть λ, μ принадлежат $\mathscr{C}'(G)$. Каково бы ни было $x \in E$, используя предложения 1 и 4 § 1 главы VI, получим

$$U(\lambda * \mu)x = \int\limits_G U(s)x d(\lambda * \mu)(s) =$$

$$= \int\limits_{G\times G} U(st)x\, d\lambda(s)\, d\mu(t) = \int\limits_{G\times G} U(s) U(t) x\, d\lambda(s)\, d\mu(t) =$$

$$= \int\limits_G U(\lambda) U(t) x\, d\mu(t) = U(\lambda) \int\limits_G U(t)x\, d\mu(t) = U(\lambda) U(\mu)\, x,$$

откуда следует (I). Аналогичное рассуждение применимо в случае (II).

Пусть G всюду означает локально компактную группу; предположим, что G действует непрерывно слева в локально компактном пространстве X. Это определяет (§ 2, n° 4) непрерывное линейное представление γ группы G в $\mathscr{M}(X)$ (наделенном топологией компактной сходимости на $\mathscr{K}(X)$).

Предложение 12. *Если* $\lambda \in \mathscr{C}'(G)$, *а* $\mu \in \mathscr{M}(X)$, *то*

$$\gamma(\lambda)\mu = \lambda * \mu.$$

В силу предложения 7 § 1,

$$\lambda * \mu = \int\limits_G (\varepsilon_s * \mu)\, d\lambda(s).$$

Но $\varepsilon_s * \mu = \gamma(s)\mu$ (n° 2, формула (5)), и, по определению $\gamma(\lambda)$,

$$\int\limits_G (\gamma(s)\mu)\, d\lambda(s) = \gamma(\lambda)\mu.$$

Следствие. *Отображение* $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda * \mu$ *произведения* $\mathscr{C}'(G) \times \times \mathscr{M}(X)$ *в* $\mathscr{M}(X)$ *гипонепрерывно относительно равностепенно непрерывных подмножеств из* $\mathscr{C}'(G)$ *и компактных подмножеств из* $\mathscr{M}(X)$ *(где* $\mathscr{C}'(G)$ *и* $\mathscr{M}(X)$ *наделены топологией компактной сходимости соответственно на* $\mathscr{C}(G)$ *и* $\mathscr{K}(X)$*).*

Действительно, $\mathscr{M}(X)$, наделенное топологией компактной сходимости на $\mathscr{K}(X)$, квазиполно. Следовательно, отображение $(\lambda, \mu) \mapsto \gamma(\lambda)\mu$ произведения $\mathscr{C}'(G) \times \mathscr{M}(X)$ в $\mathscr{M}(X)$

гипонепрерывно относительно равностепенно непрерывных подмножеств из $\mathscr{C}'(G)$ и компактных подмножеств из $\mathscr{M}(X)$ (§ 2, n° 6). Тогда достаточно применить предложение 12.

Замечания. 1) Пусть $\lambda_0 \in \mathscr{C}'(G)$. Отображение $\mu \longmapsto \lambda_0 * \mu$ пространства $\mathscr{M}(X)$ в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно. В самом деле, пусть $f \in \mathscr{K}(X)$. Имеем $\langle \lambda_0 * \mu, f \rangle = \int f(sx)\, d\lambda_0(s)\, d\mu(x) = \langle \mu, g \rangle$, где $g(x) = \int f(sx)\, d\lambda_0(s)$. Но g непрерывна (гл. VII, § 1, лемма 1). С другой стороны, пусть S есть носитель меры λ_0, а K — носитель функции f. Условия $sx \in K$ и $s \in S$ влекут $x \in S^{-1}K$; следовательно, носитель функции g содержится в $S^{-1}K$, так что $g \in \mathscr{K}(X)$. Тогда $\langle \lambda_0 * \mu, f \rangle = \langle \mu, g \rangle$ есть широко непрерывная функция от μ, чем наше утверждение и доказано.

2) Пусть $\mu_0 \in \mathscr{M}(X)$. Отображение $\lambda \longmapsto \lambda * \mu_0$ пространства $\mathscr{C}'(G)$ в $\mathscr{M}(X)$ непрерывно в топологиях $\sigma(\mathscr{C}'(G), \mathscr{C}(G))$ и $\sigma(\mathscr{M}(X), \mathscr{K}(X))$. В самом деле, пусть $f \in \mathscr{K}(X)$. Имеем $\langle f, \lambda * \mu_0 \rangle = \langle h, \lambda \rangle$, где $h(s) = \int f(sx)\, d\mu_0(x)$, и $h \in \mathscr{C}(G)$ (гл. VII, § 1, лемма 1).

Предложение 13. *Отображение $(s, \mu) \longmapsto \gamma(s)\mu$ произведения $G \times \mathscr{M}_+(X)$ в $\mathscr{M}_+(X)$ непрерывно при наделении множества $\mathscr{M}_+(X)$ положительных мер на X широкой топологией.*

Так как $\gamma(s)\mu = \gamma(ss_0^{-1})\gamma(s_0)\mu$, то из замечания 1 следует, что достаточно доказать непрерывность рассматриваемого отображения в точке вида (e, μ_0), где $\mu_0 \in \mathscr{M}_+(X)$. Следовательно, при заданных функции $f \in \mathscr{K}(X)$ и числе $\varepsilon > 0$ требуется доказать существование таких окрестностей U элемента e в G и W элемента μ_0 в $\mathscr{M}_+(X)$, что

$$\left| \int f(sx)\, d\mu(x) - \int f(x)\, d\mu_0(x) \right| \leqslant \varepsilon \tag{6}$$

для всех $s \in U$, $\mu \in W$. Пусть V — компактная окрестность носителя K функции f в X, и $\varphi \in \mathscr{K}_+(X)$ такова, что $\varphi(x) = 1$ на V; в $\mathscr{M}_+(X)$ существует такая окрестность W_0 элемента μ_0, что $a = \sup\limits_{\mu \in W_0} \mu(V)$ конечно: достаточно принять за W_0 множество тех $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$, для которых $|\langle \varphi, \mu - \mu_0 \rangle| \leqslant 1$. Так как отобра-

жение $(s, x) \mapsto sx$ непрерывно, то, с другой стороны, в G имеется такая компактная окрестность U_0 элемента e, что $sK \subset V$ для всех $s \in U_0$; тогда функция $(s, x) \mapsto f(sx)$ равномерно непрерывна на $U_0 \times V$, и, следовательно, существует такая окрестность $U \subset U_0$ элемента e, что $|f(sx) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2a$ для всех $s \in U$ и $x \in V$. Стало быть, для всех $s \in U$ и $\mu \in W_0$ имеем

$$\left| \int f(sx)\, d\mu(x) - \int f(x)\, d\mu(x) \right| \leqslant \varepsilon/2.$$

Пусть $W \subset W_0$ есть окрестность точки μ_0 в $\mathscr{M}_+(X)$, составленная из тех мер $\mu \in W_0$, для которых $\left| \int f(x)\, d\mu(x) - \int f(x)\, d\mu_0(x) \right| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon/2$. Тогда U и W и будут удовлетворять нашему требованию.

Упражнения

1) Пусть λ и μ — положительные меры $f \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, 0)\, dx$, $f \mapsto \int_0^{+\infty} f(-x, x)\, dx$ на $\mathbf{R}^2$ ($f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}^2)$). Показать, что λ и μ свертываемы. Пусть u — гомоморфизм $(x, y) \mapsto x$ $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{R}$. Показать, что u λ-собственно и μ-собственно, но $u(\lambda)$ и $u(\mu)$ не свертываемы.

2) Пусть X — локально компактное пространство, в котором действует слева непрерывно локально компактная группа G. Пусть, далее, E — векторное подпространство пространства $\mathscr{M}(X)$, устойчивое относительно всех $\gamma(s)$ ($s \in G$) и наделенное квазиполной локально выпуклой топологией, мажорирующей топологию компактной сходимости на $\mathscr{K}(X)$. Пусть $\gamma_E(s)$ для любого $s \in G$ означает сужение $\gamma(s)$ на E. Предположим, что $\mu \in E$ влечет $|\mu| \in E$ и представление γ_E группы G в E равностепенно непрерывно. Тогда, если $\mu \in E$ и $\nu \in \mathscr{M}^1(G)$, то ν и μ свертываемы и $\nu * \mu = \gamma_E(\nu)\mu \in E$. [Использовать особенно предложение 17 § 1 главы VI.]

3) Для всех $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ положим $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Пусть $\mathscr{M}_1$ — множество тех мер μ на $\mathbf{R}^n$, для которых существует такое действительно число k, что функция $(1 + |x|^2)^k$ μ-интегрируема, и $\mathscr{M}_2$ — множество тех мер ν на $\mathbf{R}^n$, для которых функция $(1 + |x|^2)^k$ ν-интегрируема при любом k. Показать, что если $\mu \in \mathscr{M}_1$ и $\nu \in \mathscr{M}_2$, то μ и ν свертываемы и $\mu * \nu \in \mathscr{M}_1$; если $\mu \in \mathscr{M}_2$ и $\nu \in \mathscr{M}_2$, то $\mu * \nu \in \mathscr{M}_2$. [Сначала показать, что если $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$, то

$$(1 + u^2)(1 + v^2) \geqslant \frac{1}{3}(1 + (u + v)^2);$$

отсюда вывести, что, каковы бы ни были x и y в $\mathbf{R}^n$,

$$1+|x|^2 \leqslant 3(1+|y|^2)(1+|x+y|^2).$$

Тогда пусть $\mu \in \mathscr{M}_1$ и $\nu \in \mathscr{M}_2$, причем $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, и пусть f — непрерывная функция $\geqslant 0$ на $\mathbf{R}^n$. Существует такое k, что $\mu=(1+|x|^2)^k \cdot \mu_1$ с ограниченным μ_1; пусть $\nu_1=(1+|x|^2)^k \cdot \nu$, что ограничено. Имеем

$$\int^* f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \leqslant 3^k \int^* (1+|x|^2)^k f(x)\, d(\mu_1 * \nu_1)(x),$$

откуда следует свертываемость μ и ν и то, что $\mu * \nu \in \mathscr{M}_1$.

Аналогично рассуждать в случае $\mu, \nu \in \mathscr{M}_2$.]

4) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$, ν — мера Лебега на $[0, +\infty[$ и $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Показать, что свертка $((\varepsilon_{x_1}-\varepsilon_{x_2}) * \nu) * \mu$ определена, но μ и ν не свертываемы. Показать, что свертки $\nu * ((\varepsilon_{x_1}-\varepsilon_{x_2}) * \mu)$ и $(\nu * (\varepsilon_{x_1}-\varepsilon_{x_2})) * \mu$ определены, однако различны при $x_1 \neq x_2$.

5) Пусть G — компактная группа и μ — такая положительная мера на G с носителем G, что $\mu * \mu = \mu$. Показать, что μ есть нормированная мера Хаара на G. [Сначала показать, что $\|\mu\|=1$. Далее, если μ не есть мера Хаара на G, то существует такая функция $f \in \mathscr{K}_+(G)$, что

$$\int f(s)\, d\mu(s) \geqslant \int f(st)\, d\mu(s)$$

для всех $t \in G$, причем

$$\int f(s)\, d\mu(s) > \int f(st)\, d\mu(s)$$

для некоторых t. Показать, что тогда $(\mu * \mu)(f) > \mu(f)$.]

6) a) Пусть $I=[0, 1]$ и f — непрерывная функция $\geqslant 0$ на $\mathbf{R}$ с носителем, содержащимся в $[-1, 0]$. Показать, что множество функций $\gamma(s) f \mid I$ $(s \in I)$ имеет бесконечный ранг в $\mathscr{K}(I)$.

b) Пусть $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{K}(R)$ и M — множество всех мер $\mu \in \mathscr{M}(I)$, для которых $\mu(f_1)=\ldots=\mu(f_n)=0$. Показать, что множество функций $y \longmapsto \int f(x+y)\, d\mu(x)$ $(y \in I)$, где μ пробегает M, имеет бесконечный ранг в $\mathscr{K}(I)$ [Использовать a).]

c) Пусть $g_1, \ldots, g_p \in \mathscr{K}(R)$. Вывести из b), что существуют меры $\mu \in M$ и $\nu \in \mathscr{M}(I)$, для которых $\nu(g_1)=\ldots=\nu(g_p)=0$ и $(\nu * \mu)(f) \neq 0$.

d) Вывести из c), что отображение $(\mu, \nu) \longmapsto \nu * \mu$ произведения $\mathscr{M}(T) \times \mathscr{M}(T)$ в $\mathscr{M}(T)$ не является широко непрерывным.

7) Пусть G — локально компактная группа.

a) Показать, что положительная мера $\mu \in \mathscr{C}'(G)$, допускающая в $\mathscr{C}'(G)$ обращение, всегда точечна.

b) Взяв в качестве G конечную группу $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, построить пример не точечной меры $\mu \in \mathscr{M}(G)$, обратимой в $\mathscr{M}(G)$.

8) Пусть G — локально компактная группа; обозначим через $\mathscr{C}'_+(G)$ множество всех положительных мер на G с компактным носителем. Показать, что отображение $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $\mathscr{M}_+(G) \times \mathscr{C}'_+(G)$ $\mathscr{M}_+(G)$ непрерывно, если наделить $\mathscr{C}'(G)$ слабой топологией $\sigma(\mathscr{C}'(G), \mathscr{C}(G))$, а $\mathscr{M}(G)$ — широкой топологией $\sigma(\mathscr{M}(G), \mathscr{K}(G))$. [Использовать упражнение 5a) § 2 главы III и то, что G паракомпактна.]

9) a) Пусть G — локально компактная группа, B — ограниченное множество в $\mathscr{M}(G)$ и C — равностепенно непрерывное подмножество из $\mathscr{C}'(G)$; показать, что если $\mathscr{C}'(G)$ наделено слабой топологией $\sigma(\mathscr{C}'(G), \mathscr{C}(G))$, а $\mathscr{M}(G)$ — широкой топологией $\sigma(\mathscr{M}(G), \mathscr{K}(G))$, то отображение $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $B \times C$ в $\mathscr{M}(G)$ непрерывно. [Заметить, что носители всех мер $\nu \in C$ содержатся в одном и том же компактном множестве, и использовать предложение 4 § 5 главы III.]

b) Если в $\mathscr{M}^1(\mathbf{R})$ положить $\mu_n = \varepsilon_n$, $\nu_n = \varepsilon_{-n}$, то последовательности (μ_n) и (ν_n) будут стремиться к 0 в слабой топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(\mathbf{R}), \mathscr{K}(\mathbf{R}))$, однако последовательность $(\mu_n * \nu_n)$ не стремится к 0 в широкой топологии.

*10) Пусть T — локально компактное пространство. Обозначим через $\mathscr{C}^\infty(T)$ банахово пространство всех непрерывных и ограниченных числовых функций на T. Будем называть множество $H \subset \mathscr{M}^1(T)$ *сжатым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество K из T, что $|\mu|(T - K) \leqslant \varepsilon$ для всех $\mu \in H$.

a) Показать, что если множество $H \subset \mathscr{M}^1(T)$ сжато и ограничено в топологии, определяемой нормой пространства $\mathscr{M}^1(T)$, то оно относительно компактно в топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(T), \mathscr{C}^\infty(T))$. [Заметить, что H относительно компактно в топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(T), \mathscr{K}(T))$.]

b) Предположим, кроме того, что T *паракомпактно*. Показать, что тогда, обратно, если H есть подмножество из $\mathscr{M}^1(T)$, относительно компактное в топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(T), \mathscr{C}^\infty(T))$, то H ограничено по норме пространства $\mathscr{M}^1(T)$ и сжато. [Рассмотреть сначала случай, когда $T = \mathbf{N}$, применив тогда упражнение 17 § 5 главы V. Затем рассмотреть случай, когда T счетно в бесконечности, являясь объединением такой последовательности (U_n) относительно компактных открытых множеств, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$. Рассуждая от противного, показать, что можно свести все к случаю, когда для каждого n существовали бы непрерывная числовая функция f_n на T с носителем в $U_{n+1} - \overline{U}_n$, такая, что $\|f_n\| \leqslant 1$, и меры $\mu_n \in H$, для которых $\mu_n(f_n) \geqslant \alpha > 0$ при любом n. Тогда рассмотреть непрерывное отображение u: $L^1(N) \to$ $\to \mathscr{C}^\infty(T)$, определяемое формулой $u((\xi_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n f_n$, и получить противоречие с тем, что было доказано для $T = \mathbf{N}$, рассмотрев отображение,

сопряженное к u. Наконец, произвольное паракомпактное локально компактное пространство T есть топологическая сумма некоторого семейства (T_α) локально компактных пространств, счетных в бесконечности; для любого α положим $m_\alpha = \sup\limits_{\mu \in H} |\mu|(T_\alpha)$; рассуждая от противного и используя предыдущий случай, показать, что $m_\alpha = 0$ для всех, кроме счетно-бесконечного числа, индексов α.]

c) Показать, что заключение пункта b) уже не будет верным для непаракомпактного локально компактного пространства, определенного в упражнении 18h) § 4 главы IV.

*11) Пусть G — локально компактная группа; обозначим в $\mathscr{M}^1(G)$ через $\mathscr{T}_{\mathrm{I}}$ топологию $\sigma(\mathscr{M}^1(G), \overline{\mathscr{K}(G)})$, через $\mathscr{T}_{\mathrm{III}}$ — топологию $\sigma(\mathscr{M}^1(G), \mathscr{C}^\infty(G))$, и пусть $\mathscr{M}_{\mathrm{I}}$, $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ означают пространство $\mathscr{M}^1(G)$, наделенное, соответственно, топологией $\mathscr{T}_{\mathrm{I}}$ или $\mathscr{T}_{\mathrm{III}}$.

a) Пусть A — ограниченное подмножество из $\mathscr{M}_{\mathrm{I}}$, а B — относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$. Показать, что сужение на $A \times B$ отображения $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{I}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{I}}$ непрерывно. [Использовать упражнение 10, чтобы свести все к оценке интеграла $\int\int f(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t)$, когда $f(st) = \sum\limits_i u_i(s) v_i(t)$, где u_i, $v_i \in \mathscr{K}(G)$.]

b) Построить пример, когда G компактна (и, следовательно, $\mathscr{T}_{\mathrm{I}} = \mathscr{T}_{\mathrm{III}}$), показывающий, что $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$, рассматриваемое как отображение $\mathscr{M}_{\mathrm{I}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{I}}$, не гипонепрерывно относительно компактных подмножеств из $\mathscr{M}_{\mathrm{I}}$ и компактных подможеств из $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ [см. упражнение 6].

c) Пусть A и B — относительно компактные подмножества из $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$. Показать, что сужение на $A \times B$ отображения $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{III}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ непрерывно [тот же метод, что и в a)].

d) Обозначим через E подпространство пространства $\mathbf{R}^G$, состоящее из линейных комбинаций характеристических функций всех открытых подмножеств из G, через $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$ — топологию $\sigma(\mathscr{M}^1(G), E)$ и через $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ — пространство $\mathscr{M}^1(G)$, наделенное топологией $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$. Напомним, что топологии, индуцированные топологиями $\mathscr{T}_{\mathrm{III}}$ и $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$ в ограниченном подмножестве из $\mathscr{M}^1(G)$, состоящем из положительных мер, будут, вообще говоря, различны (гл. V, § 5, упражнение 18c)). Напомним также, что компактные подмножества из $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ будут теми же, что и в $\mathscr{M}^1(G)$ в ослабленной топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(G), (\mathscr{M}^1(G))')$ банахова пространства $\mathscr{M}^1(G)$ (гл. VI, § 2, упражнение 12). Показать, что если A и B — относительно компактные подмножества из $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$, то сужение на $A \times B$ отображения $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ непрерывно. [Ограничиться случаем, когда A и B компактны, и начать с доказательства того, что тогда образ произведения

$A \times B$ при указанном выше отображении компактен в топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(G), (\mathscr{M}^1(G))')$; для этого применить теоремы Эберлейна и Шмульяна (Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнения 15 и 13) и свести, таким образом, все к доказательству того, что если последовательности (μ_n) и (ν_n) сходятся к 0 в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$, то то же верно и для последовательности $(\mu_n * \nu_n)$; использовать предложение 12 и упражнение 17 § 5 главы V. Наконец, для доказательства того, что отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$ непрерывно в топологии $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$, использовать с) и то, что $\mathscr{T}_{\mathrm{III}}$ мажорируется топологией $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$.]

е) Возьмем $G = \mathbf{R}^2$; пусть a и b — векторы канонического базиса пространства G над $\mathbf{R}$, ρ_n — мера на $I = [0, \pi]$ в $\mathbf{R}$, имеющая в качестве плотности относительно меры Лебега функцию $\sin(2^n x)$, и μ_n — мера $\rho_n \otimes \varepsilon_0$ на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; с другой стороны, пусть $\nu_n = \varepsilon_{b/2^n} - \varepsilon_0$ на G. Показать, что последовательность (μ_n) стремится к 0 в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ и последовательность (ν_n) стремится к 0 в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$, но последовательность $(\mu_n * \nu_n)$ не стремится к 0 в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ [ср. гл. V, § 5, упражнение 18].

f) Построить пример, когда G компактна и $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$, рассматриваемое как отображение произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$, не гипонепрерывно относительно компактных подмножеств из $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$. [Тот же метод, что и в упражнении 6, с использованием замечания, что для заданной функции $f \in E$ имеются такие компактные множества $H \subset \mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$, что множество функций $t \mapsto \int f(st)\, d\mu(t)$, где μ пробегает H, будет множеством бесконечного ранга относительно $\mathbf{R}$.]

12) Пусть G — локально компактная группа, не являющаяся унимодулярной.

а) Показать, что существует такая ограниченная положительная мера μ на G, что $\Delta_G \cdot \mu$ не ограничена [взять дискретную μ].

b) Пусть μ' — левая мера Хаара на G. Тогда μ и μ' свертываемы (предложение 5). Показать, что μ' и μ не свертываемы.

13) Пусть r — число, удовлетворяющее неравенству $0 < r < 1$; для любого целого $n \geqslant 1$ обозначим через $\lambda_{n,r}$ меру $(\varepsilon_{r^n} + \varepsilon_{-r^n})/2$ на $\mathbf{R}$ и положим $\mu_{n,r} = \lambda_{1,r} * \lambda_{2,r} * \ldots * \lambda_{n,r}$.

а) Показать, что последовательность $(\mu_{n,r})$ широко сходится к мере μ_r на $\mathbf{R}$, носитель которой содержится в $I = [-1, +1]$. [Доказать, что для любого интервала U, содержащегося в $\mathbf{R}$, последовательность $(\mu_{n,r}(U))$ сходится.] 128

b) Показать, что при $r < 1/2$ мера μ_r и мера Лебега на $\mathbf{R}$ *независимы*, однако $\mu_{1/2}$ есть мера, индуцированная на I мерой Лебега.

с) Пусть $\nu_{1/4}$ — образ меры $\mu_{1/4}$ при гомотетии $t \mapsto 2t$ в $\mathbf{R}$. Показать, что $\mu_{1/4} * \nu_{1/4} = \mu_{1/2}$, хотя каждая из мер $\mu_{1/4}$, $\nu_{1/4}$ и независима от меры Лебега [использовать упражнение 11а)].

§ 4. Свертка мер и функций

1. *Свертка меры и функции*

Пусть X — локально компактное пространство, в котором непрерывно действует слева локально компактная группа G. Пусть, далее, β — положительная мера на X, квазиинвариантная относительно G. И, наконец, пусть χ — функция > 0 на $G \times X$, измеримая относительно любой меры на $G \times X$ и такая, что $\chi(s^{-1}, \cdot)$ для любого $s \in G$ имеет плотность $\gamma(s)\beta$ относительно β:

$$\gamma(s)\beta = \chi(s^{-1}, \cdot) \cdot \beta, \tag{1}$$

что, в соответствии с соглашениями, принятыми в n° 1 § 1 главы VII, может быть записано в виде

$$d\beta(sx) = \chi(s, x) d\beta(x). \tag{1'}$$

Эти данные останутся неизменными в n°n° 1, 2 и 3 (за исключением замечания 2 в n° 2).

Напомним (§ 2, n° 5), что если χ непрерывна, а β имеет носитель X, то χ — мультипликатор.

Пусть f — комплексная функция, локально β-интегрируемая на X, и μ — мера на G. Мера $\gamma(s)(f \cdot \beta)$ для всех $s \in G$ имеет базис β, поскольку β квазиинвариантна. Следовательно, если μ и $f \cdot \beta$ свертываемы, то $\mu * (f \cdot \beta)$ имеет *базис* β (§ 3, предложение 10).

Определение 1. *Если* μ *и* $f \cdot \beta$ *свертываемы, то говорят, что* μ *и* f *свертываемы относительно* β. *Всякая плотность меры* $\mu * (f \cdot \beta)$ *относительно* β *называется сверткой меры* μ *и функции* f *относительно* β *и обозначается* $\mu *^{\beta} f$.

Если нет угрозы путаницы, β опускается. Аналогичным образом определяется свертка для нескольких мер на G и одной функции на X.

Различные свертки μ и f равны между собой локально β-почти всюду. Если β имеет носителем X и существует непрерывная свертка β и μ, то она определяется единственным способом; ее и называют тогда сверткой μ и f относительно β.

Пусть $s \in G$ и f — локально β-интегрируемая комплексная функция на X. Тогда ε_s и f свертываемы и

$$\varepsilon_s * (f \cdot \beta) = \gamma(s)(f \cdot \beta) = (\gamma(s) f) \cdot (\gamma(s) \beta) = (\gamma(s) f) \cdot \chi(s^{-1}, \cdot) \cdot \beta,$$

а следовательно,

$$(\varepsilon_s * f)(x) = \chi(s^{-1}, x) f(s^{-1}x) = (\gamma_\chi(s) f)(x) \tag{2}$$

локально β-почти всюду.

Лемма 1. *Пусть μ — мера на G. Тогда χ локально $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема, и образом меры $\mu \otimes \beta$ при гомеоморфизме $(s, \mu) \mapsto (s, s^{-1}x)$ произведения $G \times X$ на себя служит $\chi \cdot (\mu \otimes \beta)$.*

Можно предполагать $\mu \geqslant 0$. Пусть $F \in \mathscr{K}_+(G \times X)$. Имеем

$$\int F(s, s^{-1}x)\, d\mu(s)\, d\beta(x) = \int d\mu(s) \int F(s, s^{-1}x)\, d\beta(x) =$$
$$= \int d\mu(s) \int F(s, x)\, d(\gamma(s^{-1})\beta)(x) = \int d\mu(s) \int F(s, x)\, \chi(s, x)\, d\beta(x).$$

Итак, функция $(s, x) \mapsto F(s, x)\chi(s, x)$ имеет компактный носитель и $(\mu \otimes \beta)$-измерима. Согласно предложению 4 § 8 главы V, предыдущее равенство показывает, что эта функция $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема и

$$\int F(s, s^{-1}x)\, d\mu(s)\, d\beta(x) = \int F(s, x)\, \chi(s, x)\, d\mu(s)\, d\beta(x).$$

Этим доказаны одновременно оба утверждения леммы 1.

Предложение 1. *Пусть μ — мера на G и f — локально β-интегрируемая комплексная функция на X. Предположим, что функция $s \mapsto f(s^{-1}x)\chi(s^{-1}, x)$ существенно μ-интегрируема всюду, кроме некоторого локально β-пренебрежимого множества значений x, и что функция $x \mapsto \int |f(s^{-1}x)|\, \chi(s^{-1}, x)\, d|\mu|(s)$, определенная локально почти всюду относительно β, локально β-интегрируема. Тогда μ и f свертываемы.*

Можно предполагать $f \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$. Пусть $h \in \mathscr{K}_+(X)$. Требуется доказать, что функция $(s, x) \mapsto h(sx)$ существенно интегрируема относительно $\mu \otimes (f \cdot \beta) = (1 \otimes f) \cdot (\mu \otimes \beta)$ (гл. V, § 8, предложение 6), то есть что $\overline{\int}^* h(sx) f(x)\, d\mu(s)\, d\beta(x) < +\infty$ (гл. V, § 5, предложение 2); очевидно, достаточно доказать существование

такого $a>0$, что для любого компактного подмножества K из G выполняется неравенство

$$\overline{\int}^* h(sx)\, f(x)\, \varphi_K(s)\, d\mu(s)\, d\beta(x) \leqslant a.$$

Согласно лемме 1,

$$\overline{\int}^* h(sx)\, f(x)\, \varphi_K(s)\, d\mu(s)\, d\beta(x) = \int^* h(x)\, f(s^{-1}x)\, \varphi_K(s)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s)\, d\beta(x).$$

Но функция $(s, x) \mapsto h(x)\, f(s^{-1}x)\, \varphi_K(s)\, \chi(s^{-1}, x)$ $(\mu \otimes \beta)$-измерима (лемма 1) и имеет компактный носитель. Следовательно (гл. V, § 8, предложение 4), предыдущее выражение равно

$$\int^* h(x)\, d\beta(x) \int^* f(s^{-1}x)\, \varphi_K(s)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s) \leqslant \leqslant (\sup h) \int_S^* d\beta(x)\, \overline{\int}^* f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s),$$

где S — носитель функции h. Тем самым предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть μ — мера на G и f — локально β-интегрируемая комплексная функция на X. Предположим, что вы-пол няется одно из следующих условий:*

(I) *f и χ непрерывны;*

(II) *G действует совершенно в X, а f равна нулю на дополнении к счетному объединению компактных множеств;*

(III) *μ сосредоточена в счетном объединении компактных множеств.*

Если μ и f свертываемы, то функция $s \mapsto f(s^{-1}x)\chi(\ ^{-1}, x)$ существенно μ-интегрируема всюду, кроме некоторого локально β-пренебрежимого множества значений x, и локально β-почти всюду выполняется равенство

$$(\mu * {}^{\beta} f)(x) = \int_G f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s) = \int_G (\gamma^{\chi}(s) f)(x)\, d\mu(s) \qquad (3)$$

Пусть $h \in \mathscr{K}(X)$. Так как μ и f свертываемы, то функция $(s, x) \mapsto h(sx)f(x)$ существенно $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема. Согласно лемме 1, функция $(s, x) \mapsto h(x)\, f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)$ существенно $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема. При условиях (I) или (II) предложения

отсюда вытекает, что эта функция $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема; ибо в первом случае она непрерывна, и можно применить предложение 2 § 2 главы V, а во втором она равна нулю вне счетного объединения компактных множеств, и можно применить предложение 3 оттуда же. В силу теоремы Лебега — Фубини,

$$\int h(sx)\,d\mu(s)\,d(f\cdot\beta)(x) =$$
$$= \int h(x)\,f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x)\,d\mu(s)\,d\beta(x) =$$
$$= \int h(x)\,d\beta(x) \int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x)\,d\mu(s),$$

причем функция $x \mapsto g(x) = \int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x)\,d\mu(s)$ локально β-интегрируема. Таким образом, видим, что

$$\langle h, \mu * (f\cdot\beta)\rangle = \langle h, g\cdot\beta\rangle,$$

откуда $g = \mu *^{\beta} f$.

Предположим теперь, что μ сосредоточена в объединении S некоторой последовательности компактных множеств. Функция

$$(s, x) \mapsto h(x)\,f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x)\,\varphi_S(s)$$

существенно $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема и равна нулю вне счетного объединения компактных множеств, а значит, $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема. А так как $\mu = \varphi_S\cdot\mu$, то рассуждение завершается как в предыдущем случае.

Замечание. Условие (III) предложения 2 выполняется, в частности, когда μ *ограничена*. Действительно, тогда для каждого $n > 0$ существует такое компактное подмножество K_n из G, что

$$|\mu|(G - K_n) \leqslant \frac{1}{n}$$

(гл. IV, § 4, n° 7), и μ сосредоточена в объединении множеств K_n. Более общим образом, пусть ρ — такая полунепрерывная снизу конечная функция > 0 на G, что $\rho(st) \leqslant \rho(s)\rho(t)$; если $\mu \in \mathscr{M}^{\rho}$, то условие (III) выполнено, ибо $\rho\cdot\mu$ ограничена, а μ сосредоточена в тех же самых множествах, что и $\rho\cdot\mu$, поскольку ρ на каждом компактном подмножестве из G минорируется некоторой постоянной > 0.

2. *Примеры свертываемых мер и функций*

В предложениях 3 и 4 пространства $\mathscr{C}'(G)$ и $\mathscr{M}(G)$ наделены топологией *компактной сходимости* соответственно на $\mathscr{C}(G)$ и $\mathscr{K}(G)$.

Предложение 3. *Предположим, что* χ *непрерывна. Пусть* $\mu \in \mathscr{C}'(G)$ *и* $f \in \mathscr{C}(X)$. *Тогда*:

(I) μ *и* f *свертываемы относительно* β.

(II) *Формула* (3) n° 1 *определяет для любого* $x \in X$ *непрерывную свертку* $\mu * {}^{\beta}f$, *которая есть не что иное, как элемент* $\gamma_\chi(\mu)f$, *определяемый непрерывным представлением* γ_χ *группы* G *в* $\mathscr{C}(X)$; *кроме того, отображение* $(\mu, f) \longmapsto \mu * {}^{\beta}f$ *гипонепрерывно относительно равностепенно непрерывных подмножеств из* $\mathscr{C}'(G)$ *и компактных подмножеств из* $\mathscr{C}(X)$.

(III) *Если, кроме того,* $f \in \mathscr{K}(X)$, *то свертка* $\mu * {}^{\beta}f$ *из* (II) *принадлежит* $\mathscr{K}(X)$ *и отображение* $(\mu, f) \longmapsto \mu * {}^{\beta}f$ *гипонепрерывно относительно равностепенно непрерывных подмножеств из* $\mathscr{C}'(G)$ *и компактных подмножеств из* $\mathscr{K}(X)$.

Известно, что μ и f свертываемы (§ 3, предложение 8 (I)). С другой стороны, в обозначениях § 2,

$$\gamma_\chi(\mu) f = \int (\gamma_\chi(s) f)\, d\mu(s) \in \mathscr{C}(X),$$

поскольку $\mathscr{C}(X)$ квазиполно. В частности, для любого $x \in X$ имеем

$$(\gamma_\chi(\mu) f)(x) = \int (\gamma_\chi(s) f)(x)\, d\mu(s).$$

Этим, в соединении с предложением 2 и сказанным в n° 6 § 2, доказано (II). Наконец, если $f \in \mathscr{K}(X)$, то $\mu * (f \cdot \beta)$ имеет компактный носитель (§ 3, предложение 9), и, значит, $\mu * {}^{\beta}f \in \mathscr{K}(X)$. Рассмотрим непрерывное представление U группы G в пополнение $\mathscr{K}(X)^{\wedge}$, полученное продолжением по непрерывности операторов $\gamma_\chi(s)$, непрерывных на $\mathscr{K}(X)$ (§ 2, n° 1, замечание 3). Пусть S — носитель меры μ. Носители функций $\gamma_\chi(s)f$ $(s \in S)$ содержатся в некотором фиксированном компактном множестве K. Множество $\mathscr{K}(X, K)$ есть полное векторное подпространство пространства $\mathscr{K}(X)$. Следовательно, $U(\mu)f \in \mathscr{K}(X)$. Тогда, как в предыдущем случае, убеждаемся, что $U(\mu)f = \mu * {}^{\beta}f$ и (III) снова вытекает из сказанного в n° 6 § 2.

Предложение 4. *Предположим, что G действует совершенно в X и χ непрерывна. Пусть $\mu \in \mathscr{M}(G)$ и $f \in \mathscr{K}(X)$. Тогда:*

(I) μ *и* f *свертываемы относительно* β.

(II) *Формула* (3) n° 1 *определяет для любого* $x \in X$ *непрерывную свертку* $\mu * {}^{\beta}f$.

(III) *Отображение* $(\mu, f) \mapsto \mu * {}^{\beta}f$ *произведения* $\mathscr{M}(G) \times \mathscr{K}(X)$ *в* $\mathscr{C}(X)$ *гипонепрерывно относительно ограниченных подмножеств из* $\mathscr{M}(G)$ *и компактных подмножеств из* $\mathscr{K}(X)$, *содержащихся в подпространстве* $\mathscr{K}(X, L)$ (*где* L — *переменное компактное подмножество из* X).

Известно, что μ и f свертываемы (§ 3, предложение 8 (II)), и ясно, что интегралы, фигурирующие в (3), существуют для любого $x \in X$. Пусть K и L — компактные подмножества из X. В G существует такое компактное подмножество H, что отношения $x \in K$ и $s^{-1}x \in L$ влекут $s \in H$; пусть $\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$ таково, что $\varphi(s) = 1$ для всех $s \in H$. Для всех $f \in \mathscr{K}(X, L)$ и $x \in K$ имеем

$$\int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x)\,d\mu(s) = \int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1}, x)\,\varphi(s)\,d\mu(s) = ((\varphi\cdot\mu) * {}^{\beta}f)(x).$$

Следовательно, $\int f(s^{-1}x)\chi(s^{-1}, x)d\mu(s)$ есть непрерывная функция от x и определяет свертку $\mu * {}^{\beta}f \in \mathscr{C}(X)$. Более того, отображение $\mu \mapsto \varphi\cdot\mu$ пространства $\mathscr{M}(G)$ в $\mathscr{C}'(G)$ непрерывно в топологиях компактной сходимости. Значит, предложение 3 (III) влечет, что отображение $(\mu, f) \mapsto \mu * {}^{\beta}f$ произведения $\mathscr{M}(G) \times \mathscr{K}(X, L)$ в $\mathscr{C}(X)$, при любом компактном подмножестве L из X, гипонепрерывно относительно компактных подмножеств из $\mathscr{K}(X, L)$. В частности, отображение $(\mu, f) \mapsto \mu * {}^{\beta}f$ произведения $\mathscr{M}(G) \times \mathscr{K}(X)$ в $\mathscr{C}(X)$ раздельно непрерывно. Так как $\mathscr{K}(X)$ бочечно, то это отображение гипонепрерывно относительно ограниченных подмножеств из $\mathscr{M}(G)$ (Топ. вект. простр., гл. III, § 4, предложение 6).

Замечание 1. При условиях предложения 4, отображение $\mu \mapsto \mu * {}^{\beta}f$ пространства $\mathscr{M}_+(G)$ в $\mathscr{C}(X)$ непрерывно при наделении $\mathscr{M}_+(G)$ *широкой* топологией для любого $f \in \mathscr{K}(X)$. Действительно, пусть K — компактное подмножество из X и S — (компактный) носитель функции f; так как G действует совершенно в X, то множество L тех $s \in G$, для которых существует такое $x \in K$, что $s^{-1}x \in S$, компактно в G (Общ. топ., гл. III, 3-е изд.,

§ 4, теорема 1). Пусть ε — число > 0, φ — функция из $\mathscr{K}_+(G)$, равная 1 на компактном множестве L, и μ_0 — элемент из $\mathscr{M}_+(G)$; множество W_0 тех мер $\mu \in \mathscr{M}_+(G)$, для которых

$$\left| \int \varphi(s)\, d\mu(s) - \int \varphi(s)\, d\mu_0(s) \right| \leqslant \varepsilon,$$

есть окрестность точки μ_0 в $\mathscr{M}_+(G)$. С другой стороны, функция $(s, x) \longmapsto f(s^{-1}x)\chi(s^{-1}, x)$ равномерно непрерывна на $L \times K$, и, значит, существует конечное число точек $x_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что для любого $x \in K$ существует i, для которого

$$| f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x) - f(s^{-1}x_i)\, \chi(s^{-1}, x_i) | \leqslant \varepsilon$$

при любом $s \in L$. Так как $\mu(L) \leqslant \int \varphi(s)\, d\mu_0(s) + \varepsilon$ для любого $\mu \in W_0$, то имеем также

$$\left| \int f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s) - \int f(s^{-1}x_i)\, \chi(s^{-1}, x_i)\, d\mu(s) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left(\int \varphi(s)\, d\mu_0(s) + \varepsilon \right)$$

для любого x, удовлетворяющего предыдущему неравенству, и любого $\mu \in W_0$. Пусть тогда W — окрестность μ_0 в $\mathscr{M}_+(G)$, образованная всеми мерами $\mu \in W_0$, для которых

$$\left| \int f(s^{-1}x_i)\, \chi(s^{-1}, x_i)\, d\mu(s) - \int f(s^{-1}x_i)\, \chi(s^{-1}, x_i)\, d\mu_0(s) \right| \leqslant \varepsilon$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. Ясно, что для любой меры $\mu \in W$ и любого $x \in K$ имеем

$$\left| \int f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s) - \int f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu_0(s) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left(2 \int \varphi(s)\, d\mu_0(s) + 2\varepsilon + 1 \right),$$

а так как ε произвольно, то тем самым наше утверждение доказано.

Предложение 5. *Предположим, что* χ *непрерывно и каждая функция* $\chi(s, \cdot)$ *ограничена. Тогда:*

(I) *Функция* $s \longmapsto \rho(s) = \sup\limits_{x \in X} \chi(s^{-1}, x)$ *на* G *полунепрерывна снизу,* > 0 *и удовлетворяет неравенству* $\rho(st) \leqslant \rho(s)\rho(t)$ *для всех* s *и* t *из* G.

(II) *Если* $\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$ *и* $f \in L^\infty(X, \beta)$, *то* μ *и* f *свертываемы и* $\mu *^\beta f$ *задается локально почти всюду формулой* (3) n°1, *причем* $\mu *^\beta f \in L^\infty(X, \beta)$ *и* $\| \mu *^\beta f \|_\infty \leqslant \| \mu \|_\rho \| f \|_\infty$.

(III) *Если, кроме того,* $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ (соотв. $\overline{\mathscr{K}(X)}$), *то формула* (3) n° 1 *определяет при любом* x *свертку* $\mu *^\beta f$, *принадлежащую* $\mathscr{C}^\infty(X)$ (соотв. $\overline{\mathscr{K}(X)}$).

(IV) *Если* $f \in \overline{\mathscr{K}(X)}$, *то свертка* $\mu *^\beta f$, *определяемая формулой* (3), *есть не что иное, как элемент* $\gamma_\chi(\mu) f$, *определяемый непрерывным представлением* γ_χ *группы* G *в* $\overline{\mathscr{K}(X)}$.

Из тождества $\chi(st, x) = \chi(s, tx)\chi(t, x)$ сразу следует, что $\rho(st) \leqslant \rho(s)\rho(t)$. С другой стороны, ρ полунепрерывна снизу как верхняя огибающая непрерывных функций.

Пусть $\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$. Согласно предложению 1, μ и 1 свертываемы; предложение 2 показывает, что $(|\mu| *^\beta 1)(x) \leqslant \int_G \rho(s)\, d|\mu|(s)$ локально β-почти всюду. Следовательно, если f β-измерима и $|f| \leqslant 1$, то μ и f свертываемы и $N_\infty(\mu *^\beta f) \leqslant \int \rho(s)\, d|\mu|(s)$. При этом $\mu *^\beta f$ задается локально почти всюду формулой (3) n° 1, ибо условие (III) предложения 2 выполнено. Это влечет (II).

Предположим, что f непрерывна и ограничена по абсолютному значению единицей. Ясно, что интегралы, фигурирующие в (3), существуют для любого $x \in X$. Покажем, что они непрерывно зависят от x. Можно предполагать $\mu \geqslant 0$. Пусть $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$. И пусть K — такое компактное подмножество из G, что $\int_{G-K} \rho(s)\, d\mu(s) \leqslant \varepsilon$. Существует такая окрестность V точки x_0 в X, что $x \in V$ влечет

$$|f(s^{-1}x)\chi(s^{-1}, x) - f(s^{-1}x_0)\chi(s^{-1}, x_0)| \leqslant \varepsilon/\mu(K)$$

для всех $s \in K$. Тогда для $x \in V$ имеем

$$\left| \int f(s^{-1}x)\chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s) - \int f(s^{-1}x_0)\chi(s^{-1}, x_0)\, d\mu(s) \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{G-K} \rho(s)\, d\mu(s) + \int_K \frac{\varepsilon}{\mu(K)}\, d\mu(s) \leqslant 3\varepsilon,$$

откуда и следует наше утверждение. Предположим, кроме того, что $f \in \overline{\mathscr{K}(X)}$. Пусть H — такое компактное подмножество из X, что $|f(y)| \leqslant \varepsilon$ для всех $y \notin H$. И пусть $x \notin KH$. Тогда $s^{-1}x \notin H$

для всех $s \in K$, и, значит,

$$\left| \int_G f(s^{-1}x)\, \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s) \right| \leqslant \int_{G-K} \rho(s)\, d\mu(s) + \int_K \varepsilon\rho(s)\, d\mu(s) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left(1 + \int_G \rho(s)\, d\mu(s) \right),$$

что и завершает доказательство утверждения (III).

Наконец, если $f \in \overline{\mathscr{K}(X)}$, то, поскольку $\varepsilon_x \in \mathscr{M}^1(X)$ при любом $x \in X$, имеем

$$(\gamma_\chi(\mu) f)(x) = \int (\gamma_\chi(s) f)(x)\, d\mu(x),$$

и, значит, $\gamma_\chi(\mu)(f)$ есть свертка $\mu * {}^\beta f$, определяемая формулой (3).

Предложение 6. *Предположим, что* χ *непрерывно и каждая функция* $\chi(s, \cdot)$ *ограничена. Пусть* $\rho(s) = \sup\limits_{x \in X} \chi(s^{-1}, x)$. *Пусть, далее,* p *и* q — *сопряженные показатели* $(1 \leqslant p < +\infty)$. *И пусть* $\mu \in \mathscr{M}^{\rho^{1/q}}(G)$, *а* $f \in L^p(X, \beta)$. *Тогда*:

(I) μ *и* f *свертываемы*;

(II) *свертка* $\mu * {}^\beta f$ *задается локально* β-*почти всюду формулой* (3) *и равна локально* β-*почти всюду функции* $g \in L^p(X, \beta)$, *для которой* $\| g \|_p \leqslant \| \mu \|_{\rho^{1/q}} \| f \|_p$;

(III) g *равна элементу* $\gamma_\chi(\mu) f$, *определяемому непрерывным представлением* γ_χ *группы* G *в* $L^p(X, \beta)$.

В силу формулы (5) n° 5 § 2

$$\int^* \| \gamma_\chi(s) f \|_p\, d|\mu|(s) \leqslant \left(\int^* \rho(s)^{1/q}\, d|\mu|(s) \right) \| f \|_p < +\infty.$$

С другой стороны, отображение $s \mapsto \gamma_\chi(s) f$ пространства G в $L^p(X, \beta)$ непрерывно (§ 2, предложение 9). Следовательно, это отображение μ-интегрируемо. Пусть

$$g = \int_G (\gamma_\chi(s) f)\, d\mu(s) \in L^p(X, \beta).$$

Имеем $\| g \|_p \leqslant \left(\int \rho^{1/q}(s)\, d|\mu|(s) \right) \| f \|_p$. Применяя предыдущие замечания к $|f|$, видим, что отображение $s \mapsto \varepsilon_s * |f|$ пространства G в $L^p(X, \beta)$ μ-интегрируемо, и, следовательно, отображение $s \mapsto \langle h, \varepsilon_s * (|f| \cdot \beta) \rangle$ μ-интегрируемо для любого $h \in \mathscr{K}(X)$. Тогда

предложение 7 § 1 показывает, что μ и $f\cdot\beta$ свертываемы. Кроме того,

$$\int\limits_X g(x)\,h(x)\,d\beta(x) = \int\limits_G d\mu(s) \int\limits_X (\gamma_\chi(s)\,f)(x)\,h(x)\,d\beta(x) =$$

$$= \int\limits_G \langle h,\ \varepsilon_s * (f\cdot\beta)\rangle\,d\mu(s),$$

а этот последний интеграл, в силу предложения 7 § 1, равен $\langle h, \mu*(f\cdot\beta)\rangle$. Таким образом, видим, что g есть свертка μ и f. Эта свертка, согласно предложению 2 и следующему за ним замечанию, задается локально β-почти всюду формулой (3).

Допуская вольность, часто через $\mu *^{\beta} f$ обозначают одну из функций g, указанных в предложении, что позволяет писать

$$\|\mu *^{\beta} f\|_p \leqslant \|\mu\|_{\rho^{1/q}} \|f_p\|.$$

Впрочем, если X счетно в бесконечности, этот способ записи вполне оправдан.

Следствие. *При условиях предложения* 6, *отображение* $(\mu, f) \longmapsto \mu *^{\beta} f$ *определяет на* $L^p(X, \beta)$ *структуру левого модуля над* $\mathcal{M}^{\rho^{1/q}}(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$.

Это вытекает из предложений 5 и 6 и ассоциативности свертки.

Замечание 2. Пусть X есть локально компактное пространство, в котором локально компактная группа G действует справа непрерывно по закону $(x, s) \longmapsto xs$. Пусть, далее, β — положительная мера на X и χ — функция >0 на $G\times X$, измеримая относительно любой меры на $G\times X$ и такая, что для любого $s\in G$ имеет место равенство $\delta(s)\beta = \chi(s,\cdot)\cdot\beta$. Пусть, наконец, f — локально β-интегрируемая функция на X и μ — мера на G. Если $f\cdot\beta$ и μ свертываемы (относительно отображения $(x, s)\longmapsto xs$ произведения $X\times G$ в X), то $(f\cdot\beta)*\mu$ имеет базис β. Тогда говорят, что f и μ свертываемы относительно β; всякая плотность меры $(f\cdot\beta)*\mu$ относительно β называется сверткой f и μ относительно β и обозначается $f *^{\beta}\mu$, или просто $f*\mu$.

Пусть G^0 — группа, противоположная G. G^0 действует в X слева непрерывно по закону $(s, x)\longmapsto xs$. Утверждение, что f и μ свертываемы в указанном только что смысле, равносильно

утверждению, что μ и f свертываемы относительно группы G^0, действующей слева в X; и свертки $f * {}^\beta\mu$ суть не что иное, как свертки $\mu * {}^\beta f$ относительно группы G^0, действующей слева в X. С другой стороны, для $s \in G^0$ имеем $\gamma(s)\beta = \chi(s^{-1}, \cdot)\cdot\beta$. Тогда результаты n°n° 1 и 2 непосредственно переходят в результаты, касающиеся сверток $f * {}^\beta\mu$. В частности:

1) Если $s \in G$ и если f локально β-интегрируема, то f и ε_s свертываемы и

$$(f * \varepsilon_s)(x) = \chi(s^{-1}, x) f(xs^{-1}). \tag{4}$$

2) Если f и μ свертываемы и выполняется одно из условий (I), (II), (III) предложения 2, то $f * {}^\beta\mu$ задается локально β-почти всюду формулой

$$(f * {}^\beta\mu)(x) = \int_G f(xs^{-1}) \chi(s^{-1}, x)\, d\mu(s). \tag{5}$$

Предоставляем читателю перенесение других формулировок. Отметим, что если χ непрерывна, то

$$\chi(ts, x) = \chi(s, xt)\chi(t, x) \quad (x \in X;\ s, t \in G). \tag{6}$$

3. Свертка и сопряженность

Примем снова предположения и обозначения начала n° 1, однако дополнительно предположим, что β *относительно инвариантна и имеет мультипликатор* χ; следовательно, χ — непрерывная функция на G.

Предложение 7. *Пусть f — локально β-интегрируемая функция на X, ν — мера на X и μ — мера на G. Предположим, что*:

(I) μ *и f свертываемы и формула* (3) n° 1 *определяет локально β-почти всюду некоторую свертку* $\mu * {}^\beta f$.

(II) $\chi\cdot\check{\mu}$ *и* ν *свертываемы.*

(III) *Функция* $g(s, x) = f(s^{-1}x)\chi(s^{-1})$ $(\mu \otimes \nu)$-*интегрируема.*

Тогда f существенно интегрируема относительно $(\chi\cdot\check{\mu}) * \nu$, *функция* $\mu * {}^\beta f$, *определяемая формулой* (3), ν-*интегрируема и*

$$\nu(\mu * {}^\beta f) = ((\chi\cdot\check{\mu}) * \nu)(f). \tag{7}$$

Так как $g(s, x)$ интегрируема относительно $\mu \otimes \nu$, то функция $f(sx)$ существенно интегрируема относительно $(\chi\cdot\check{\mu}) \otimes \nu$ и f

существенно интегрируема относительно $(\chi\cdot\check{\mu})*\nu$. Согласно теореме Лебега — Фубини, $\mu *{}^{\beta} f = \int g(s, x)\, d\mu(s)$ ν-интегрируема, и

$$\nu(\mu *{}^{\beta} f) = \int\int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1})\,d\mu(s)\,d\nu(x) =$$
$$= \int\int f(sx)\,\chi(s)\,d\check{\mu}(s)\,d\nu(x) = ((\chi\cdot\check{\mu})*\nu)(f).$$

Примеры. 1) В силу доказанного выше предложения 3 и следствия предложения 5 § 1, можно взять $f\in\mathscr{C}(X)$, $\nu\in\mathscr{C}'(X)$ и $\mu\in\mathscr{C}'(G)$. Тогда формула (7) означает, что эндоморфизм $\nu\longmapsto(\chi\cdot\check{\mu})*\nu$ пространства $\mathscr{C}'(X)$ *сопряжен* к эндоморфизму $f\longmapsto\mu*f$ пространства $\mathscr{C}(X)$.

2) В силу доказанного выше предложения 3, предложения 8 § 3 и того замечания, что носитель непрерывной функции $g(s, x)$ пересекается с носителем меры $\mu\otimes\nu$ по компактному множеству, можно взять $f\in\mathscr{K}(X)$, $\nu\in\mathscr{M}(X)$ и $\mu\in\mathscr{C}'(G)$. Тогда формула (7) означает, что эндоморфизм $\nu\longmapsto(\chi\cdot\check{\mu})*\nu$ пространства $\mathscr{M}(X)$ *сопряжен* к эндоморфизму $f\longmapsto\mu*f$ пространства $\mathscr{K}(X)$.

3) Если G действует совершенно в X, то, в силу доказанного выше предложения 4, предложения 8 § 3 и того же замечания, что и в примере 2, можно взять $f\in\mathscr{K}(X)$, $\nu\in\mathscr{C}'(X)$ и $\mu\in\mathscr{M}(G)$.

Предложение 8. *Пусть f и g — локально β-интегрируемые функции на X и $\mu\in\mathscr{M}(G)$. Предположим, что:*

(I) *μ и f свертываемы и формула* (3) n° 1 *определяет локально β-почти всюду свертку $\mu *{}^{\beta} f$.*

(II) *$\chi\cdot\check{\mu}$ и g свертываемы и формула* (3) n° 1 (*где μ заменено на $\chi\cdot\check{\mu}$, а f — на g*) *определяет локально β-почти всюду некоторую свертку $(\chi\cdot\check{\mu}) *{}^{\beta} g$.*

(III) *Существует функция ψ на G, локально μ-почти всюду равная 1 и такая, что функция $h(s, x) = g(x)\,f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1})\,\psi(s)$ $(\mu\otimes\beta)$-интегрируема.*

Тогда функции $g(x)\,((\mu *{}^{\beta} f)(x))$ и $f(x)\,(((x\cdot\check{\mu}) *{}^{\beta} g)(x))$ существенно β-интегрируемы и справедливо равенство

$$\int f(x)\,(((\chi\cdot\check{\mu}) *{}^{\beta} g)(x))\,d\beta(x) = \int g(x)\,((\mu *{}^{\beta} f)(x))\,d\beta(x). \tag{8}$$

Действительно, в силу (III) и теоремы Лебега — Фубини, функция $x \mapsto g(x) \int f(s^{-1}x)\chi(s^{-1})\psi(s)\,d\mu(s)$ β-интегрируема, и

$$I = \int\int f(s^{-1}x)\,g(x)\,\chi(s^{-1})\,\psi(s)\,d\mu(s)\,d\beta(x) =$$

$$= \int g(x)\,d\beta(x) \int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1})\,\psi(s)\,d\mu(s).$$

Но $\psi\cdot\mu = \mu$, и, следовательно,

$$\int f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1})\,\psi(s)\,d\mu(s) = (\mu *^{\beta} f)(x)$$

локально β-почти всюду. Это показывает, что функция $x \mapsto g(x)((\mu *^{\beta} f)(x))$ существенно β-интегрируема, и

$$I = \int g(x)((\mu *^{\beta} f)(x))\,d\beta(x).$$

С другой стороны, лемма 1 показывает, что функция $(s, x) \mapsto g(sx)\,f(x)\,\chi(s^{-1})\,\psi(s)$ интегрируема относительно $(\chi\cdot\mu)\otimes\beta$. Следовательно, функция $(s, x) \mapsto g(s^{-1}x)\,f(x)\,\psi(s^{-1})$ интегрируема относительно $\check{\mu}\otimes\beta$, и

$$I = \int\int g(s^{-1}x)\,f(x)\,\psi(s^{-1})\,d\check{\mu}(s)\,d\beta(x) =$$

$$= \int f(x)\,d\beta(x) \int g(s^{-1}x)\,\psi(s^{-1})\,d\check{\mu}(s).$$

Но $\check{\psi}\cdot\check{\mu} = \check{\mu}$, и, следовательно, $\int g(s^{-1}x)\,\psi(s^{-1})\,d\check{\mu}(s) = ((\chi\cdot\check{\mu}) *^{\beta} g)(x)$ локально β-почти всюду. Это показывает, что функция $x \mapsto f(x)(((\chi\cdot\check{\mu}) *^{\beta} g)(x))$ существенно β-интегрируема и

$$I = \int f(x)(((\chi\cdot\check{\mu}) *^{\beta} g)(x))\,d\beta(x).$$

Тем самым предложение доказано.

Примеры. 4) Можно взять $f \in \mathscr{C}(X)$, $g \in \mathscr{K}(X)$ и $\mu \in \mathscr{C}'(G)$ (с $\psi = 1$).

5) Если G действует совершенно на X, то можно взять $f \in \mathscr{K}(X)$, $g \in \mathscr{K}(X)$ и $\mu \in \mathscr{M}(G)$ (с $\psi = 1$).

6) Можно взять $f \in L^p(X, \beta)$, $g \in L^q(X, \beta)$ и $\mu \in \mathscr{M}^\rho(G)$, где $1 \leqslant p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\rho = \chi^{-1/q}$. Условия (I) и (II) выполнены

в силу предложений 5 и 6. Докажем (III). Как было показано, μ сосредоточена в счетном объединении S компактных множеств. Возьмем в качестве ψ характеристическую функцию множества S. Функция h $(\mu \otimes \beta)$-измерима: действительно, это верно для функции $(s, x) \mapsto g(x)\chi(s^{-1})\psi(s)$, а согласно лемме 1, и для функции $(s, x) \mapsto f(s^{-1}x)$. При этом, поскольку g равна нулю вне счетного объединения β-интегрируемых множеств, h равна нулю вне счетного объединения $(\mu \otimes \beta)$-интегрируемых множеств. Тогда (гл. V, § 8, предложение 4) имеем

$$J = \int\int^* |g(x) f(s^{-1}x)| \chi(s^{-1}) \psi(s)\, d|\mu|(s)\, d\beta(x) =$$
$$= \int |g(x)|\, d\beta(x) \int^* |f(s^{-1}x)| \chi(s^{-1}) \psi(s)\, d|\mu|(s). \qquad (9)$$

Но так как g (соотв. ψ) равно нулю вне счетного объединения интегрируемых множеств, то верхние интегралы в правой части формулы (9) равны существенным верхним интегралам (гл. V, § 2, предложение 3). Поскольку же $\mu = \psi \cdot \mu$, то (гл. V, § 5, предложение 2)

$$\overline{\int}^* |f(s^{-1}x)| \chi(s^{-1}) \psi(s)\, d|\mu|(s) = \overline{\int}^* |f(s^{-1}x)| \chi(s^{-1})\, d|\mu|(s).$$

Согласно предложению 6, этот последний интеграл конечен и равен $(|\mu| *^{\beta} |f|)(x)$ локально β-почти всюду. Следовательно, имеем

$$J = \overline{\int}^* |g(x)| (|\mu| *^{\beta} |f|)(x)\, d\beta(x),$$

и J конечно, поскольку $g \in L^q$, а $|\mu| *^{\beta} |f| \in L^p$ (предложение 6). Стало быть, h $(\mu \otimes \beta)$-интегрируема.

Тогда формула (8) означает, что эндоморфизм

$$g \mapsto (\chi \cdot \check{\mu}) * g$$

пространства $L^q(X, \beta)$ для $\mu \in \mathscr{M}^p(G)$ *сопряжен* к эндоморфизму $f \mapsto \mu * f$ пространства $L^p(X, \beta)$.

4. *Свертка меры и функции на группе*

Пусть G — локально компактная группа. Зафиксируем в n°n° 4 и 5 положительную относительно инвариантную меру $\beta \neq 0$ на G, и пусть χ и χ' — ее левый и правый мультипликаторы (напомним, что $\chi' = \chi\Delta_G$). Если μ — мера на G и f — локально

β-интегрируемая функция на G, то свертываемость μ и f и свертки $\mu * f$ (соотв. свертываемость f и μ и свертки $f * \mu$) определяются путем рассмотрения G как группы левых (соотв. правых) переносов в самой себе. Истолкуем применительно к этому случаю некоторые из предыдущих результатов:

1) Пусть μ — мера на G и f — локально β-интегрируемая комплексная функция на X. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

(I) f непрерывна;

(II) f равна нулю на дополнении к счетному объединению компактных множеств;

(III) μ сосредоточена в счетном объединении компактных множеств.

Если μ и f свертываемы, то локально β-почти всюду

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(s^{-1}x)\,\chi(s^{-1})\,d\mu(s). \tag{10}$$

Если f и μ свертываемы, то локально β-почти всюду

$$(f * \mu)(x) = \int_G f(xs^{-1})\,\chi'(s^{-1})\,d\mu(s). \tag{11}$$

2) Пусть p и q — сопряженные показатели ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$). Если $\mu \in \mathscr{M}^{\chi^{-1/q}}(G)$ и $f \in L^p(G, \beta)$, то μ и f свертываемы и $\mu * f$ равна локально β-почти всюду некоторой функции из $L^p(G, \beta)$; имеем (при отмеченной уже выше вольности обозначений)

$$\|\mu * f\|_p \leqslant \|\mu\|_{\chi^{-1/q}} \|f\|_p.$$

Если $\mu \in \mathscr{M}^{\chi'^{-1/q}}(G)$ и $f \in L^p(G, \beta)$, то f и μ свертываемы и $f * \mu$ равна локально β-почти всюду некоторой функции из $L^p(G, \beta)$; имеем $\|f * \mu\|_p \leqslant \|\mu\|_{\chi'^{-1/q}} \|f\|_p$.

3) Отображения $(\mu, f) \mapsto \mu * f$ и $(f, \mu) \mapsto f * \mu$ определяют в $L^p(G, \beta)$ структуры левого модуля над $\mathscr{M}^{\chi^{-1/q}}(G)$ и правого модуля над $\mathscr{M}^{\chi'^{-1/q}}(G)$. Эти два внешних закона в $L^p(G, \beta)$, в силу ассоциативности свертки, перестановочны.

4) Если $\mu * f$ непрерывна и задается в каждой точке формулой (10), то

$$(\mu * f)(e) = \int f(s^{-1})\,\chi(s^{-1})\,d\mu(s). \tag{12}$$

Если $f * \mu$ непрерывна и задается в каждой точке формулой (11), то

$$(f * \mu)(e) = \int f(s^{-1}) \chi'(s^{-1}) \, d\mu(s). \tag{13}$$

5. *Свертка функций на группе*

Сохраним обозначения G, β, χ, χ' из n° 4.

Напомним, что для комплексной функции f на G свойство быть локально β-интегрируемой не зависит от выбора β. Пусть $\mathcal{L}(G)$ — множество всех функций, обладающих этим свойством. Если $f \in \mathcal{L}(G)$, $g \in \mathcal{L}(G)$, то отношение

«$f \cdot \beta$ и $g \cdot \beta$ свертываемы»

не зависит от выбора β (§ 3, предложение 6). Будем тогда говорить, что f и g *свертываемы*. Согласно n° 1 $(f \cdot \beta) * (g \cdot \beta)$ имеет вид $h \cdot \beta$ с $h \in \mathcal{L}$, причем h определяется с точностью до значений на локально β-пренебрежимых множествах. Положим $h = f *^{\beta} g$ и будем говорить, что h есть *свертка* функций f и g относительно β. (Если нет угрозы путаницы, β опускается.) При замене β на $\psi \cdot \beta$, где ψ — непрерывное представление G в $\mathbf{R}_+^*$, h не изменится (§ 3, предложение 6); если же β заменить на $a\beta$ ($a \in \mathbf{R}_+^*$), то h заменится на ah. Аналогичным образом определяется свертка нескольких функций на G.

Если одна из сверток функций f и g непрерывна, то она определяется единственным способом, ибо носителем меры β служит G. Тогда ее называют сверткой f и g относительно β.

Ясно, что

$$f *^{\beta} g = (f \cdot \beta) *^{\beta} g = f *^{\beta} (g \cdot \beta). \tag{14}$$

Предложение 9. *Пусть f, $g \in \mathcal{L}(G)$. Предположим, что функция $s \mapsto g(s^{-1}(x)) f(s) \chi(s^{-1})$ существенно β-интегрируема всюду, кроме локально β-пренебрежимого множества значений x, и что функция $x \mapsto \int |g(s^{-1}x) f(s)| \chi(s^{-1}) \, d\beta(s)$, определенная локально β-почти всюду, локально β-интегрируема. Тогда f и g свертываемы.*

Это вытекает из предложения 1.

Предложение 10. *Пусть* f, $g \in \mathscr{L}(G)$. *Предположим, что одна из этих двух функций непрерывна или равна нулю на дополнении к счетному объединению компактных множеств. Если* f *и* g *свертываемы, то функция* $f * g$ *задается локально* β*-почти всюду формулой*

$$(f * g)(x) = \int\limits_G g(s^{-1}x) f(s) \chi(s^{-1}) \, d\beta(s) = \int\limits_G f(xs^{-1}) g(s) \chi'(s^{-1}) \, d\beta(s). \quad (15)$$

Это следует из предложения 2 и замечаний n°4.

В частности, если $f * g$ непрерывна и задана в каждой точке формулой (15), то

$$(f * g)(e) = \int g(s^{-1}) f(s) \chi(s^{-1}) \, d\beta(s) = \int f(s^{-1}) g(s) \chi'(s^{-1}) \, d\beta(s). \quad (16)$$

В еще более частном случае, когда β — левая и правая мера Хаара, если $f*g$ и $g*f$ непрерывны и заданы в каждой точке формулой (15) и аналогичной формулой для $g*f$, имеем

$$(f * g)(e) = (g * f)(e) = \int f(s) g(s^{-1}) \, d\beta(s). \quad (17)$$

Предложение 11. *Пусть* f, $g \in \mathscr{L}(G)$. *Предположим, что одна из функций* f, g *непрерывна и одна из функций* f, g *имеет компактный носитель. Тогда* f *и* g *свертываемы. Формула* (15) *определяет для любого* $x \in G$ *непрерывную свертку* $f*g$. *Если* $f \in \mathscr{K}(G)$ *и* $g \in \mathscr{K}(G)$, *то* $f*g \in \mathscr{K}(G)$.

Это вытекает из предложений 3 и 4.

Предложение 12. *Пусть* p *и* q — *сопряженные показатели* $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. *Если* $f\chi^{-1/q} \in L^1(G, \beta)$ *и* $g \in L^p(G, \beta)$, *то* f *и* g *свертываемы,* $f*g$ *равна локально* β*-почти всюду некоторой функции из* $L^p(G, \beta)$ *и*

$$\| f * g \|_p \leqslant \| f\chi^{-1/q} \|_1 \| g \|_p.$$

Если $f \in L^p(G, \beta)$ *и* $g\chi'^{-1/q} \in L^1(G, \beta)$, *то* f *и* g *свертываемы,* $f*g$ *равна локально* β*-почти всюду некоторой функции из* $L^p(G, \beta)$ *и*

$$\| f * g \|_p \leqslant \| f \|_p \| g\chi'^{-1/q} \|_1.$$

Это вытекает из предложений 5 и 6 и замечаний n° 4.

Предложение 13. *Если* $f\chi^{-1} \in L^1(G, \beta)$ *и* $g \in \overline{\mathcal{K}(G)}$, *или* $f \in \overline{\mathcal{K}(G)}$ *и* $g\chi'^{-1} \in L^1(G, \beta)$, *то* f *и* g *свертываемы и* (15) *определяет для каждого* $x \in G$ *свертку* $f * g$, *которая принадлежит* $\overline{\mathcal{K}(G)}$.

Это вытекает из предложения 5 и замечаний n° 4.

Предложение 14. *Если* $f\chi^{-1} \in L^1(G, \beta)$ *и* $g \in L^\infty(G, \beta)$, *то формула* (15) *определяет для каждого* $x \in G$ *ограниченную свертку* $f * g$, *равномерно непрерывную в правой равномерной структуре группы* G.

Мы уже знаем, что $f * g$ принадлежит $L^\infty(G, \beta)$ (предложение 5); при этом $(f * g)(x) = \int f(xs^{-1})\, g(s)\, d\nu(s)$, где $\nu = \chi'^{-1} \cdot \beta$; ν есть правая мера Хаара. Следовательно,

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x')| \leqslant \|g\|_\infty \int |f(xs^{-1}) - f(x's^{-1})|\, d\nu(s) =$$

$$= \|g\|_\infty \int |f(s^{-1}) - f(x'x^{-1}s^{-1})|\, d\nu(s),$$

и последний интеграл сколь угодно мал, как только $x'x^{-1}$ принадлежит надлежащей окрестности элемента e (§ 2, предложение 8).

Предложение 15. *Пусть* p *и* q — *сопряженные показатели* $(1 < p < +\infty)$. *Предположим, что* β *левоинвариантна, и пусть* $f \in L^p(G, \beta)$, $g \in L^q(G, \check{\beta})$. *Тогда* f *и* g *свертываемы. Формула* (15) *определяет для каждого* $x \in G$ *свертку* $f * g$, *принадлежащую* $\overline{\mathcal{K}(G)}$ *и такую, что* $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|\check{g}\|_q$.

В самом деле, $\check{g} \in L^q(G, \beta)$, и, значит, функция $s \mapsto g(s^{-1}x) f(s)$ β-интегрируема для всех $x \in G$. При этом

$$\int |g(s^{-1}x) f(s)|\, d\beta(s) \leqslant \left(\int |f(s)|^p\, d\beta(s)\right)^{1/p} \left(\int |g(s^{-1}x)|^q\, d\beta(s)\right)^{1/q} =$$

$$= \|f\|_p \left(\int |\check{g}(x^{-1}s)|^q\, d\beta(s)\right)^{1/q} = \|f\|_p \|\check{g}\|_q;$$

следовательно, f и g свертываемы (предложение 9). В то же время видим, что (15) определяет для любого x свертку $f * g$, причем

$$|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p \|\check{g}\|_q.$$

Для f и g из $\mathscr{K}(G)$ имеем $f * g \in \mathscr{K}(G)$ (предложение 11); следовательно, для $f \in L^p(G, \beta)$ и $g \in L^q(G, \check{\beta})$ свертка $f * g$, доставляемая формулой (15), является равномерным пределом функций из $\mathscr{K}(G)$ и, стало быть, принадлежит $\overline{\mathscr{K}(G)}$.

Следствие. *Пусть $f \in L^2(G, \beta)$, $g \in L^2(G, \beta)$. Тогда f и $\check{\bar{g}}$ свертываемы. Одна из сверток $f * \check{\bar{g}}$ принадлежит $\mathscr{K}(G)$, и ее значение в e равно $\int\limits_G f(s)\overline{g(s)}\,d\beta(s)$.*

Достаточно в предложении 15 положить $p = q = 2$ и применить (16).

Не будем более предполагать β левоинвариантной. Пусть ρ — такая полунепрерывная снизу конечная функция > 0 на G, что $\rho(st) \leqslant \rho(s)\rho(t)$ для любых s, t из G. Обозначим через $L^\rho(G, \beta)$ множество всех классов комплексных функций на G, интегрируемых относительно $\rho \cdot \beta$. При отображении $f \mapsto f \cdot \beta$ $L^\rho(G, \beta)$ отождествляется с (не зависящим от выбора β) множеством тех элементов из $\mathscr{M}^\rho(G)$, которые имеют базис β. Если положить

$$\|f\|_\rho = \int\limits_G |f(s)|\,\rho(s)\,d\beta(s)$$

для $f \in L^\rho(G, \beta)$, то это отождествление будет согласовываться с нормами, так что $L^\rho(G, \beta)$ представится в виде полной нормированной подалгебры алгебры $\mathscr{M}^\rho(G)$. В силу предложения 10 § 3, это будет даже двусторонний идеал в $\mathscr{M}^\rho(G)$. (При $\rho = 1$ вновь приходим к утверждениям n° 4.) В частности, $L^1(G, \beta)$ отождествимо с некоторым замкнутым двусторонним идеалом в $\mathscr{M}^1(G)$.

Предложение 16. *Пусть U — непрерывное представление группы G в банахово пространство E. Положим $\rho(s) = \|U(s)\|$ для каждого $s \in G$ и $U(f) = U(f \cdot \beta)$ для каждой функции $f \in L^\rho(G, \beta)$. Тогда $f \mapsto U(f)$ будет линейным представлением алгебры $L^\rho(G, \beta)$ в E таким, что $\|U(f)\| \leqslant \|f\|_\rho$.*

Это вытекает из сказанного в n° 6 § 2 и предложения 11 § 3.

6. *Приложения*

Предложение 17. *Пусть G — локально компактная группа и A — подмножество из G, измеримое и не локально пренебрежимое относительно меры Хаара. Тогда $A \cdot A^{-1}$ есть окрестность элемента e.*

Пусть β — левая мера Хаара. Существует такое компактное подмножество K из G, что $B = A \cap K$ интегрируемо и имеет меру >0 относительно β. Применим следствие предложения 15 к $f = g = \varphi_B$. Функция $F = \varphi_B * \check{\varphi}_B$ непрерывна и >0 в e. Следовательно, существует такая окрестность V элемента e, что $F(x) > 0$ для всех $x \in V$. Но

$$F(x) = \int \varphi_B(s)\, \varphi_B(x^{-1}s)\, d\beta(s) = \beta(B \cap xB).$$

Таким образом, для всех $x \in V$ имеем $B \cap xB \neq \varnothing$, откуда $x \in B \cdot B^{-1}$. Следовательно, $V \subset B \cdot B^{-1} \subset A \cdot A^{-1}$.

Следствие 1. *Пусть H — подгруппа группы G, измеримая относительно меры Хаара β. Тогда H либо открыта, либо локально β-пренебрежима.*

Так как $H = H \cdot H^{-1}$, то в случае, когда H не локально β-пренебрежима, она содержит окрестность элемента e (предложение 17) и, стало быть, открыта (Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 2, следствие предложения 4).

Следствие 2. *Пусть L — подмножество из G, устойчивое относительно умножения и такое, что его дополнение локально пренебрежимо относительно меры Хаара β. Тогда $L = G$.*

Действительно, дополнения к множествам L^{-1} и $L \cap L^{-1}$ локально β-пренебрежимы. Но $L \cap L^{-1}$ есть подгруппа, и, значит, открыта (следствие 1), а следовательно, и замкнута. Поэтому $G - (L \cap L^{-1})$, которое открыто и локально β-пренебрежимо, пусто. Следовательно, $G = L \cap L^{-1}$.

Предложение 18. *Пусть G — локально компактная группа и Γ — множество, наделенное такими умножением $(u, v) \mapsto uv$ и отделимой топологией, что:*

1) *топология в* Г *инвариантна относительно переносов;*

2) *сужение умножения на любое компактное подмножество из* Г *непрерывно.*

Пусть $f: G \to \Gamma$ *есть отображение* G *в* Г, *обладающее тем свойством, что* $f(xy) = f(x)f(y)$ *для всех* x, y *из* G, *и измеримое относительно меры Хаара* β *на* G. *Тогда* f *непрерывно.*

Положим $g(x) = f(x^{-1})$ для всех $x \in G$. Так как f и g β-измеримы, то существует такое не β-пренебрежимое компактное подмножество K из G, что сужения функций f и g на K непрерывны. Отображение $(x, y) \mapsto f(xy^{-1}) = f(x)g(y)$ произведения $K \times K$ в Г непрерывно, поскольку умножение в Г непрерывно на $f(K) \times g(K)$; но это отображение записывается в виде $\varphi \circ \psi$, где ψ есть отображение $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ произведения $K \times K$ на $K \cdot K^{-1}$, а φ — сужение f на $K \cdot K^{-1}$. Пусть R — отношение эквивалентности, определенное на $K \times K$ отображением ψ. Отображение ψ' фактормножества $(K \times K)/R$ на $K \cdot K^{-1}$, полученное из ψ факторизацией, непрерывно, и, значит, $(K \times K)/R$ отделимо, а ψ' — гомеоморфизм. Так как $\varphi \circ \psi$ непрерывно, то видим, что сужение f на $K \cdot K^{-1}$ непрерывно. Но $K \cdot K^{-1}$ есть окрестность элемента e (предложение 17); следовательно, f непрерывна в e. Так как для каждого $x_0 \in G$ имеем $f(x_0x) = f(x_0)f(x)$, то f непрерывна в x_0, поскольку топология в Г инвариантна относительно переносов.

Следствие 1. *Пусть* G — *локально компактная группа,* β — *мера Хаара на* G, E — *отделимое бочечное локально выпуклое пространство и* U — *такое линейное представление* G *в* E, *что* $U(s) \in \mathscr{L}(E; E)$ *для любого* $s \in G$, *и* β-*измеримое при наделении* $\mathscr{L}(E; E)$ *топологией простой сходимости. Тогда* U — *непрерывное линейное представление.*

Пусть Г — группа автоморфизмов пространства E, наделенная топологией простой сходимости. Эта топология отделима и инвариантна относительно переносов. Пусть K — компактное подмножество из Г. Тогда K ограничено в $\mathscr{L}(E; E)$, наделенном топологией простой сходимости, и, следовательно, равностепенно непрерывно (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, теорема 2); значит, отображение $(u, v) \mapsto v \circ u$ произведения $K \times K$ в $\mathscr{L}(E; E)$ непрерывно (там же, § 4, следствие 1 предложения 9). Таким образом, для любого $x \in E$ отображение $s \mapsto U(s)x$ пространства G в E

непрерывно (предложение 18). А так как E бочечно, то U непрерывно (§ 2, предложение 1).

Следствие 2. *Пусть G — локально компактная группа, β — мера Хаара на G, E — сепарабельное банахово пространство и U — такое линейное представление G в E, что $U(s) \in \mathscr{L}(E; E)$ для всех $s \in G$. Пусть (a_m) — тотальная последовательность в E и (a'_n) — всюду плотная последовательность в единичном шаре B' сопряженного к E пространства E', наделенного слабой топологией. Предположим, что функции $s \longmapsto \langle U(s)a_m, a'_n \rangle$ на G β-измеримы. Тогда U — непрерывное линейное представление.*

Сначала докажем, что для любого $z' \in E'$ числовые функции

$$s \longmapsto \langle U(s)\, a_m,\ z' \rangle$$

β-измеримы; можно ограничиться случаем, когда $\|z'\| \leqslant 1$, и так как B' метризуемо в слабой топологии (Топ. вект. простр., гл. IV, § 5, предложение 2), то найдется подпоследовательность (a'_{n_k}) последовательности (a'_n), слабо сходящаяся к z'; следовательно, функция

$$s \longmapsto \langle U(s)\, a_m,\ z' \rangle$$

является пределом последовательности β-измеримых функций, откуда и вытекает наше утверждение. Из него следует, что отображение $s \longmapsto U(s)a_m$ группы G в E β-измеримо при любом m (гл. IV, § 5, предложение 10). С другой стороны, существует последовательность (b_m) элементов из E, являющихся линейными комбинациями элементов a_i, всюду плотная в единичном шаре пространства E. Так как $\|U(s)\| = \sup\limits_m \|U(s)b_m\|$ для каждого $s \in G$, то $s \longmapsto \|U(s)\|$ измеримо. Пусть K — компактное подмножество из G и $\varepsilon > 0$. Существует такое компактное множество $K_0 \subset K$, что $\beta(K - K_0) \leqslant \varepsilon$ и сужения на K_0 функций $s \longmapsto U(s)a_m$ и $s \longmapsto \|U(s)\|$ непрерывны. Тогда отображения $U(s)$ для $s \in K_0$ равностепенно непрерывны, и топология простой сходимости индуцирует в $U(K_0)$ топологию простой сходимости на множестве, образованном элементами a_m (Топ. вект. простр., гл. III, § 3, предложение 5). Следовательно, отображение $s \longmapsto U(s)$ множества K_0 в $\mathscr{L}_s(E; E)$ непрерывно. А тогда достаточно применить следствие 1.

7. Регуляризация

Предложение 19. *Пусть G — локально компактная группа, β — относительно инвариантная ненулевая положительная мера на G и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра окрестностей элемента e в G, образованный всеми компактными окрестностями. Пусть, далее, f_V для любой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ означает непрерывную функцию $\geqslant 0$ на G с носителем, содержащимся в V, для которой $\int f_V d\beta = 1$. Тогда в $\mathscr{M}(G)$, наделенном топологией компактной сходимости на $\mathscr{K}(G)$, для любого $\mu \in \mathscr{M}(G)$ имеем*

$$\mu = \lim_V (\mu * f_V) \cdot \beta = \lim_V (f_V * \mu) \cdot \beta,$$

где предел берется по фильтру сечений базиса $\mathfrak{B}$.

В топологии компактной сходимости на $\mathscr{C}(G)$, $f_V \cdot \beta$ стремится к ε_e по фильтру сечений базиса $\mathfrak{B}$ (§ 2, следствие 1 леммы 4). Следовательно, $\mu = \lim\limits_V \mu * (f_V \cdot \beta) = \lim\limits_V (f_V \cdot \beta) * \mu$ в $\mathscr{M}(G)$, наделенном топологией компактной сходимости на $\mathscr{K}(G)$ (§ 3, следствие предложения 12).

Замечания. 1) Таким образом, видим, что всякая мера на G является пределом мер, обладающих *непрерывной плотностью* относительно любой меры Хаара (в топологии, указанной в пред ложении 19, и тем более в широкой топологии).

2) Если G метризуема, то можно в качестве $\mathfrak{B}$ взять *последовательность* (V_n) окрестностей. Тогда μ будет пределом последовательности мер $(\mu * f_{V_n}) \cdot \beta$ с непрерывными плотностями. Если G — действительная группа Ли, то можно взять f_{V_n} бесконечно дифференцируемыми; как будет показано в дальнейшем, тогда и плотности $\mu * f_{V_n}$ будут бесконечно дифференцируемыми.

Предложение 20. *При сохранении условий и обозначений предложения 19, пусть $p \in [1, +\infty[$ и $g \in L^p(G, \beta)$. Тогда*

$$g = \lim_V g \overset{\beta}{*} f_V = \lim_V f_V \overset{\beta}{*} g$$

в смысле нормы N_p, где предел берется по фильтру сечений базиса $\mathfrak{B}$.

Достаточно применить предложение 6 (III) этого параграфа и следствие 3 леммы 4 § 2.

Замечание 3. Согласно предложению 15, функции $g * f_V$ и $f_V * g$ принадлежат $\overline{\mathscr{K}(G)}$.

Следствие. *Пусть* W — *замкнутое векторное подпространство пространства* $L^1(G, \beta)$. *Для того чтобы* W *было левым* (соотв. *правым*) *идеалом алгебры* $L^1(G, \beta)$, *необходимо и достаточно, чтобы* W *было инвариантно относительно левых* (соотв. *правых*) *переносов из* G.

Предположим, что W — левый идеал. И пусть $s \in G$ и $g \in W$. Имеем $\varepsilon_s * g = \lim\limits_V f_V * (\varepsilon_s * g) = \lim\limits_V (f_V * \varepsilon_s) * g$ и $(f_V * \varepsilon_s) * g \in W$, следовательно, $\varepsilon_s * g \in W$, и, стало быть, $\gamma(s) g \in W$. Обратно, если W инвариантно относительно левых переносов, то $\mu * {}^\beta g \in W$ для всех $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ и $g \in W$, ибо отображение $s \mapsto \varepsilon_s * g$ пространства G в банахово пространство W непрерывно (§ 2, предложение 8) и ограничено, а значит, μ-интегрируемо; поэтому его интеграл, равный $\mu * g$ (§ 1, предложение 7), принадлежит W; следовательно, W тем более есть левый идеал в $L^1(G, \beta)$. Точно так же рассуждаем при рассмотрении правых идеалов.

Пример. Возьмем $G = \mathbf{R}$. Определим функцию $F_n \in \mathscr{K}(R)$ формулами

$$F_n(x) = (1 - x^2)^n, \quad \text{если} \quad x \in [-1, 1],$$
$$F_n(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin [-1, 1].$$

Пусть $A_n = \int\limits_{-1}^{+1} F_n(x)\, dx$ и $G_n = A_n^{-1} F_n$. Очевидно, меры $G_n(x)\, dx$ удовлетворяют условиям следствия 1 леммы 4 § 2. Пусть μ — мера на $\mathbf{R}$, носитель которой содержится в $[-1/2, 1/2]$. Имеем

$$(\mu * G_n)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} G_n(x - y)\, d\mu(y) = A_n^{-1} \int\limits_{-1/2}^{1/2} F_n(x - y)\, d\mu(y).$$

Если $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$(\mu * G_n)(x) = A_n^{-1} \int\limits_{-1/2}^{1/2} [1 - (x - y)^2]^n\, d\mu(y),$$

и, значит, $\mu * G_n$ совпадает на $[-1/2, 1/2]$ с некоторым полиномом. В частности, если f — непрерывная функция с компактным носителем, содержащимся в $[-1/2, 1/2]$, то $f * G_n$ совпадает на $[-1/2, 1/2]$ с некоторым полиномом; при этом, согласно предложению 5 (IV) этого параграфа и следствию 3 леммы 4 § 2, $f * G_n$ равномерно сходится к f. °Если f принадлежит классу C^r, то производные $D^s(f * G_n)$, где $0 \leqslant s \leqslant r$, равномерно стремятся к $D^s f$.${}_\circ$

Упражнения

*1) Пусть G — локально компактная группа, β — левая мера Хаара на G, A — β-измеримое подмножество из G и ν — ненулевая положительная мера на G. Предположим, что sA локально ν-пренебрежимо при любом $s \in G$. Показать, что A локально β-пренебрежимо. [Свести к случаю, когда A относительно компактно, а ν ограничена. Доказать, что ν и $\nu_A \cdot \beta$ свертываемы и $\nu * {}^{\beta}\varphi_A = 0$, откуда $0 = \| \nu * \varphi_A \cdot \beta \| = \| \nu \| \times \| \varphi_A \cdot \beta \|$.] Показать, приняв гипотезу континуума, что этот результат может быть неверным, если A не предполагать β-измеримым. [Взять $G = \mathbf{R}^2$, в качестве ν взять меру Хаара подгруппы $\mathbf{R} \times \{0\}$ и применить упражнение 7с) § 8 главы V.]

2) Пусть H — аддитивная группа $\mathbf{R}$, наделенная дискретной топологией, G — локально компактная группа $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times H$ и α — мера Хаара на G, β — мера Хаара на $R \times H$, а $\mu = \varepsilon_0 \otimes \beta \in \mathscr{M}(G)$. Построить функцию $f \geqslant 0$ на G, локально α-пренебрежимую (так что μ и f свертываемы) и в то же время такую, чтобы никакой перенос функции f не был μ-измеримым. [Взять за образец построение из упражнения 4 § 3 главы V.]

*3) Пусть G — локально компактная группа.

a) Пусть μ — такая ненулевая ограниченная положительная мера на G, что $\mu * \mu = \mu$. Показать, что носитель S меры μ компактен. [Пусть $f \in \mathscr{K}_+(G)$, $f \neq 0$ и выбрана левая мера Хаара на G, относительно которой берутся свертки; имеем $\mu * f \in \overline{\mathscr{K}(G)}$; пусть $x \in S$ таково, что $(\mu * f)(x) = \sup\limits_{y \in S} (\mu * f)(y)$; показать что $(\mu * f)(y) = (\mu * f)(x)$ для всех $y \in S$.]

b) Показать, что S — компактная подгруппа группы G и μ — нормированная мера Хаара на S. [Использовать а), упражнение 21 из Общ. топ., гл. III, 3-е изд., § 5, и упражнение 5 § 3.]

*4) Пусть G — локально компактная группа, и μ_t для любого $t \in \mathbf{R}_+^*$ означает ненулевую ограниченную положительную меру на G. Предположим, что отображение $t \mapsto \mu_t$ непрерывно в топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(G), \overline{\mathscr{K}(G)})$ и $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$ для всех s, t из $\mathbf{R}_+^*$.

a) Показать, что существует число $c \in \mathbf{R}$, для которого $\| \mu_t \| = \exp(ct)$. [Заметить, что $t \longmapsto \| \mu_t \|$ полунепрерывно снизу и

$$\| \mu_{s+t} \| = \| \mu_s \| \cdot \| \mu_t \|.$$

Воспользоваться предложением 18.]

b) Предположим $c = 0$. Показать, что μ_t при $t \to 0$ слабо сходится к нормированной мере Хаара некоторой компактной подгруппы группы G. [Использовать слабую компактность единичного шара в $\mathscr{M}^1(G)$ и показать, что для всякой слабой предельной точки μ функции μ_t по фильтру окрестностей нуля в $\mathbf{R}_+^*$ имеем $\mu_t * \mu = \mu_t$ при любом t и, далее, $\mu * \mu = \mu$; в заключение применить упражнение 3.]

*5) Пусть G — локально компактная группа, счетная в бесконечности, β — левая мера Хаара на G, $a \in \mathbf{R}_+^*$ и $(\nu_u)_{0 \leqslant u \leqslant a}$ — семейство положительных мер на G, удовлетворяющее следующим условиям:

(I) $\nu_0 = \varepsilon_e$, $\nu_{u+v} = \nu_u * \nu_v$, если $u + v \leqslant a$, $\nu_u = \check{\nu}_u$;

(II) если $0 < u \leqslant a$, то $\nu_u = f_u \cdot \beta$, где $f_u \geqslant 0$ полунепрерывна снизу;

(III) ν_u есть широко непрерывная функция от u.

a) Пусть $f \in \mathscr{K}_+(G)$. Показать, что если $0 < u \leqslant a$, то

$$\int (f_{u/2} * f)(z)^2 \, d\beta(z) = \int f(x) \, (f_u * f)(x) \, d\beta(x). \qquad (1)$$

b) Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Показать, что если $0 < u \leqslant a$, то $f_{u/2} * f$ есть функция с β-интегрируемым квадратом, и снова имеет место (1).

c) Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$ такова, что $\nu_a * f = 0$. Показать, что $f = 0$. [В силу b), $\nu_{a/2^n} * f = 0$ при любом целом $n > 0$, и, значит, согласно замечанию 1 n° 3 § 3, $f = 0$.]

d) Пусть $\nu \in \mathscr{C}'(G)$ такова, что $\nu_a * \nu = 0$. Показать, что $\nu = 0$. [Регуляризовать ν при помощи функций из $\mathscr{K}(G)$ и применить c).]

6) Пусть G — локально компактная группа. Показать, что если $\mathscr{K}(G)$ коммутативна относительно свертывания, то G коммутативна. [Показать при помощи регуляризации, что $\mathscr{C}'(G)$ коммутативна, и применить это к мерам ε_s, где $s \in G$.]

7) Пусть G — локально компактная группа и β — левая мера Хаара на G. Показать, что алгебра $L^1(G, \beta)$ обладает единичным элементом в том и только том случае, когда G дискретна. [Предположим, что G не дискретна, и пусть $f_0 \in L^1(G, \beta)$. Существует такая компактная окрестность V элемента e, что

$$\int_V |f_0(x)| \, d\beta(x) < 1.$$

Пусть U — симметричная компактная окрестность элемента e,

удовлетворяющая условию $U^2 \subset V$. Для почти всех $x \in U$ имеем

$$|(\varphi_U * f_0)(x)| = \int_U |f_0(y^{-1}x)| \, d\beta(y) \leqslant \int_V |f_0(x)| \, d\beta(x) < 1,$$

и, стало быть, f_0 не является единичным элементом в $L^1(G, \beta)$.]

*8) Пусть G — счетная в бесконечности локально компактная группа, действующая непрерывно слева в польском локально компактном пространстве T. Пусть, далее, ν — положительная мера на T, квазиинвариантная относительно G, и R — ν-измеримое отношение эквивалентности на T, согласующееся с G. Тогда существуют (гл. VI, § 3, предложение 2) такие польское локально компактное пространство B и ν-измеримое отображение p пространства T в B, что $R(x, y)$ равносильно $p(x) = p(y)$. Пусть ν' — псевдообраз меры ν при отображении p, а $b \mapsto \lambda_b$ $(b \in B)$ есть дезинтегрирование ν посредством R. Показать, что λ_b для почти всех $b \in B$ квазиинвариантны относительно G.

[Пусть χ — функция на $G \times T$, удовлетворяющая условиям упражнения 13 § 1 главы VII. Показать, что для любого $s \in G$ существует такое ν'-пренебрежимое подмножество $N(s)$ из B, что $\chi(s^{-1}, \cdot)$ локально λ_b-интегрируемо для всех $b \notin N(s)$; для этого заметить, что при любом $\psi \in \mathscr{K}(T)$ функция $x \mapsto \psi(x)\chi(s^{-1}, x)$ λ_b-интегрируема, за исключением значений b, принадлежащих некоторому ν'-пренебрежимому множеству $N(s, \psi)$, и использовать лемму 1 § 3 главы VI. Положим $\lambda'_{b,s} = 0$, если $b \in N(s)$, и $\lambda'_{b,s} = \chi(s^{-1}, \cdot)\cdot\lambda_b$, если $b \notin N(s)$. Показать, что отображение $b \mapsto \lambda'_{b,s}$ ν'-согласовано (использовать лемму 3 § 3 главы VI) и $\gamma(s)\beta = \int \lambda'_{b,s} \, d\nu'(b)$. Показать, с другой стороны, что $\gamma(s)\beta = \int \gamma(s)\lambda_b \, d\nu'(b)$, и вывести отсюда, что для любого $s \in G$ имеем $\gamma(s)\lambda_b = \chi(s^{-1}, \cdot)\cdot\lambda_b$ для почти всех b, а значит, что для почти всех b имеем $\gamma(s)\lambda_b = \chi(s^{-1}, \cdot)\cdot\lambda_b$ для почти всех s. Тогда воспользоваться следствием 2 предложения 17 § 4, чтобы вывести отсюда, что, для почти всех b, $\gamma(s)\lambda_b$ эквивалентно λ_b для всех $s \in G$.]

Показать, что если ν относительно инвариантно относительно G с мультипликатором χ, то λ_b, для почти всех b, относительно инвариантны с мультипликатором χ.

9) Пусть G — локально компактная группа, β — левая мера Хаара на G, а A, B — β-интегрируемые множества, для которых $\beta(A) \leqslant \beta(B)$. Показать, что существуют:

1) попарно непересекающиеся множества N, K_1, K_2, ..., покрывающие A, где N β-пренебрежимо, а K_n компактны;

2) попарно непересекающиеся множества N', K'_1, K'_2, ..., покрывающие B, с компактными K'_n;

3) такие $s_n \in G$, что $K'_n = s_n K_n$.

[Используя то, что $\beta(xA \cap B)$ непрерывно зависит от x и $\int \beta(xA \cap B)\, d\beta(x) = \beta(A^{-1})\,\beta(B)$, показать, что если $\beta(A) \neq 0$, то существует такое $x \in G$, что $\beta(xA \cap B) \neq 0$.]

10) Пусть G — локально компактная группа и β — левая мера Хаара на G. Для любых β-интегрируемых множеств A, B положим $\rho(A, B) = \beta(A \cup B) - \beta(A \cap B)$.

a) Пусть A — β-интегрируемое множество. Показать, что функция $x \mapsto \rho(xA, A)$ непрерывна.

b) Пусть U — окрестность элемента e. Показать, что существуют такие компактное множество A и число $\varepsilon > 0$, что $\rho(xA, A) < \varepsilon$ влечет $x \in U$. [Принять за A окрестность элемента e, для которой $A \cdot A^{-1} \subset U$.]

c) Для того чтобы множество $C \subset G$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие β-интегрируемое множество A и число a $(0 < a < 2\beta(A))$, что $x \in C$ влечет $\rho(xA, A) \leqslant a$.

11) a) Пусть G — локально компактная группа, порождаемая компактной окрестностью элемента e, и φ — несюръективный непрерывный эндоморфизм группы G, являющийся точкой прикосновения группы $\mathscr{G}$ (взаимно непрерывных) автоморфизмов группы G в топологии компактной сходимости. Тогда $\lim\limits_{\psi \in \mathscr{G},\, \psi \to \varphi} \operatorname{mod} \psi = 0$. [Пусть K — компактная окрестность элемента e, порождающая G, и μ — левая мера Хаара на G. Если $\mu(\varphi(K)) > 0$, то $\varphi(K)\varphi(K)^{-1}$ есть окрестность e в G, и потому $\varphi(G)$ есть открытая подгруппа группы G; для $\psi \in \mathscr{G}$, достаточно близких к φ, имеем $\psi(K) \subset \varphi(G)$, и, следовательно, $\psi(G) \neq G$, что невозможно. Значит, $\mu(\varphi(K)) = 0$. Когда $\psi \in \mathscr{G}$ стремится к φ, $\mu(\psi(K))$ стремится к 0.]

b) Пусть G — свободная абелева группа, прямая сумма $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots$, где каждая G_i изоморфна $\mathbf{Z}$. Будем рассматривать G как дискретную группу, и пусть φ — не сюръективный эндоморфизм $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$ группы G. Тогда φ есть предел, в топологии компактной сходимости, автоморфизмов группы G, и всякий автоморфизм группы G имеет модуль 1.

12) Для каждого $t > 0$ и каждого $x \in \mathbf{R}$ положим $F_t(x) = te^{-\pi t^2 x^2}$. Пусть $f \in \overline{\mathscr{K}(\mathbf{R})}$. Показать, что $f * F_t$ равномерно стремится к f, когда t стремится к $+\infty$. [Показать, что меры $F_t(x)dx$ удовлетворяют условиям леммы 4 § 2 с $a = 0$.]

*13) Пусть G — локально компактная группа, действующая непрерывно слева в польском локально компактном пространстве T.

Пусть, далее, β — левая мера Хаара на G, ν — положительная квазиинвариантная мера на T и $\chi(s, x)$ — функция >0 на $G \times T$, удовлетворяющая условиям упражнения 13 § 1 главы VII.

Для $f \in L^p(T, \nu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ положим

$$(\gamma_{\chi, p}(s) f)(x) = \chi(s^{-1}, x)^{1/p} f(s^{-1}x).$$

a) Показать, что $\gamma_{\chi, p}(s)$ для любого $s \in G$ есть изометрический эндоморфизм пространства $L^p(T, \nu)$. Показать, что отображение $s \mapsto \gamma_{\chi, p}(s)$ есть линейное представление G в $L^p(T, \nu)$. [Рассуждать как в n° 5 § 2.]

b) Пусть $f \in \mathscr{L}^p(T, \nu)$ и $h \in \mathscr{K}(G)$. Показать, что функция

$$(x, s) \mapsto f(s^{-1}x)\, h(s)\, \chi(s^{-1}, x)^{1/p}$$

интегрируема в p-й степени относительно $\beta \otimes \nu$ [начать со случая $p = 1$ и применить лемму 1 § 4]. Показать, что если q — показатель, сопряженный с p, и $g \in \mathscr{L}^q(T, \nu)$, то $f(s^{-1}x)\, h(s)\, g(x)\, \chi(s^{-1}, x)^{1/p}$ интегрируема относительно $\beta \otimes \nu$ [записать h в виде $h_1 h_2$ с h_1, $h_2 \in \mathscr{K}(G)$]. Тогда вывести из теоремы Лебега — Фубини, что функция

$$s \mapsto \int g(x)\, (\gamma_{\chi, p}(s) f)(x)\, d\nu(x)$$

для всех $f \in L^p(T, \nu)$ и $g \in L^q(T, \nu)$ β-измерима.

c) Показать, используя следствие 2 предложения 18 § 4 и лемму 1 § 3 главы VI, что представление $s \mapsto \gamma_{\chi, p}(s)$ группы G в $L^p(T, \nu)$, где $1 \leqslant p < +\infty$, *непрерывно*.

d) Предположим, кроме того, что функция $x \mapsto \chi(s^{-1}, x)$ для любого $s \in G$ ограничена. Для всех $f \in L^p(T, \nu)$ положим

$$(\gamma_\chi(s) f)(x) = \chi(s^{-1}, x) f(s^{-1}x).$$

Показать, что $s \mapsto \gamma_\chi(s)$ есть непрерывное представление группы G в $L^p(T, \nu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. [Показать, как в доказательстве предложения 9 § 2, что $s \mapsto \gamma_\chi(x)$ есть представление группы G эндоморфизмами пространства $L^p(T, \nu)$. Затем заметить, что если $f \in L^p(T, \nu)$ и $h \in \mathscr{K}(G)$, то лемма 1 § 4 показывает, что $h(s)f(s^{-1}x)\chi(s^{-1}, x)$ интегрируема в p-й степени относительно $\beta \otimes \nu$. Завершить доказательство как в c).]

14) a) Пусть G — локально компактная группа, f — полунепрерывная снизу положительная функция на G и μ — положительная мера на G. Показать, что функция $x \mapsto \int^* f(s^{-1}x)d\mu(s) = g(x)$ полунепрерывна снизу на G (см. гл. IV, § 1, теорема 1); для того чтобы μ и f были свертываемы, необходимо и достаточно, чтобы g была интегрируема относительно левой меры Хаара на G.

b) Пусть, на группе $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, μ есть мера $\varepsilon_0 \otimes \lambda$, где λ — мера Лебега на $\mathbf{R}$; и пусть $f(x, y) = (1 - |xy - 2|)^+$; показать, что функция $g(x, y) = \int f(x - s, y - t)\, d\mu(s, t)$ конечна всюду на G, но не непрерывна и не интегрируема относительно меры Лебега на G.

*15) Пусть G — локально компактная группа и β — левая мера Хаара на G; допуская вольность, будем отождествлять в дальнейшем β-интегрируемые числовые функции с их классами в $L^1(G, \beta)$; та же вольность для $L^p(G, \beta)$.

a) Пусть A — такой непрерывный эндоморфизм банахова пространства $L^1(G, \beta)$, что при любом $s \in G$ имеем $A(f * \varepsilon_s) = A(f) * \varepsilon_s$ для всех $f \in L^1(G, \beta)$. Показать, что тогда $A(f * g) = A(f) * g$ для всякой функции $g \in \mathscr{K}(G)$ [заметить, что $s \longmapsto g(s) A(f * \varepsilon_s)$ есть β-интегрируемое отображение G в $L^1(G, \beta)$]; и обратно. Вывести отсюда, что существует, и притом единственная, ограниченная мера μ на G, такая, что $A(f) = \mu * f$ для всех $f \in L^1(G, \beta)$, и что $\| A \| = \| \mu \|$. [В обозначениях предложения 19, рассмотреть предел отображения $A(f_V * g)$ по ультрафильтру, мажорирующему фильтр сечений базиса фильтра $\mathfrak{B}$, используя компактность единичного шара пространства $\mathscr{M}^1(G)$ в слабой топологии $\sigma(\mathscr{M}^1(G), \overline{\mathscr{K}(G)})$.]

b) Пусть μ — ограниченная мера на G; показать непосредственно, что норма непрерывного эндоморфизма $\gamma(\mu)$: $f \longmapsto \mu * f$ пространства $L^\infty(G, \beta)$ равна $\| \mu \|$. [Свести к случаю, когда μ имеет компактный носитель и непрерывную плотность относительно $|\mu|$.] Отсюда снова вывести, что непрерывный эндоморфизм $\gamma(\mu)$: $f \longmapsto \mu * f$ пространства $L^1(G, \beta)$ имеет норму, равную $\| \mu \|$.

c) Предположим, что G *компактно*, а μ *положительна*. Показать, что если $1 < p < +\infty$, то норма непрерывного эндоморфизма $\gamma(\mu)$: $f \longmapsto \mu * f$ пространства $L^p(G, \beta)$ равна $\| \mu \|$.

d) Взять в качестве G циклическую группу третьего порядка. Указать пример такой меры μ на G, чтобы норма эндоморфизма $\gamma(\mu)$ пространства $L^p(G, \beta)$, где $1 < p < +\infty$, была строго меньше $\| \mu \|$.

*16) Сохраним обозначения и соглашения упражнения 15.

a) Показать, что для того, чтобы ограниченная мера μ на G была такой, что $\| \mu f \|_1 = \| f \|_1$ при всех $f \in L^1(G, \beta)$, необходимо и достаточно, чтобы μ была точечной мерой с нормой 1. [Используя то, что норма эндоморфизма $\gamma(|\mu|)$ пространства $L^1(G, \beta)$ равна $\| \mu \|$ (упражнение 15), показать, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(G)$ необходимо должно выполняться равенство

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \int |f| \, d|\mu|;$$

вывести отсюда сначала, что $\mu = c|\mu|$, где c — постоянная с абсолютным значением 1, а затем, что μ точечна.]

b) Возьмем в качестве G циклическую группу третьего порядка. Указать пример такой не точечной меры μ на G что $\| \mu * f \|_2 = \| f \|_2$ для каждой числовой функции f, определенной на G.

17) Сохраним обозначения и соглашения упражнения 15.

a) Пусть μ — ограниченная мера на G; для того чтобы эндоморфизм $\gamma(\mu)$: $f \longmapsto \mu * f$ пространства $L^p(G, \beta)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ был

сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $c_p > 0$, что $\|\check{\mu} * g\|_q \geqslant c_p \|g\|_q$ для всех $g \in L^q(G, \beta)$ (где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). [См. Топ. вект. простр., гл. IV, § 5, упражнение 11.]

b) Показать, что если μ — мера с базисом β и G не дискретна, то $\gamma(\mu)$ не может быть сюръективным, каково бы ни было $p \in [1, +\infty]$. [Для $p < +\infty$ использовать a), сведя к случаю, когда плотность меры μ относительно β принадлежит $\mathscr{K}(G)$; для $p = +\infty$ рассуждать непосредственно, заметив, что функция $f * g$ при любых $f \in L^1(G, \beta)$ и $g \in L^\infty(G, \beta)$ равномерно непрерывна относительно правой равномерной структуры.]

c) Показать, что если G коммутативна, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и эндоморфизм $\gamma(\mu)$ пространства $L^p(G, \beta)$ сюръективен, то он биективен. [Используя регуляризацию, показать, что если $\gamma(\mu)$ не инъективен, то эндоморфизм $\gamma(\check{\mu})$ пространства $L^q(G, \beta)$ не инъективен: использовать следствие предложения 4 § 6 главы IV.]

d) Примем $G = \mathbf{Z}$ и $\mu = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$; показать, что $\gamma(\mu)$ инъективен в пространствах $L^q(\mathbf{Z}, \beta)$ с $p \neq +\infty$, но не в $L^\infty(\mathbf{Z}, \beta)$, и не сюръективен ни при каком p.

*18) Сохраним обозначения и соглашения упражнения 15.

a) Пусть μ — ограниченная мера на G с носителем, содержащим по крайней мере две различные точки. Показать, что существуют компактное множество K и число $k \in]0, 1[$, для которых $\|\varphi_{sK} \cdot \mu\| \leqslant k \|\mu\|$ при любом $s \in G$. [Если t, t' — две различные точки носителя меры μ, принять за K столь малую окрестность элемента e, чтобы sK не могло пересекаться одновременно с tK и $t'K$.]

b) Пусть μ — ограниченная мера $\geqslant 0$ на G с носителем, содержащим по крайней мере две различные точки. Показать, что существует функция $f \in L^\infty(G, \beta)$, не эквивалентная функции $\geqslant 0$ и такая, что $\mu * f$ будет $\geqslant 0$ локально почти всюду относительно β. [Использовать a), приняв f равной -1 на K и надлежащей положительной постоянной на $\complement K$.] Если при этом носитель меры μ компактен, то существует функция f с компактным носителем, обладающая вышеуказанными свойствами.

c) Пусть μ_1 и μ_2 — ненулевые положительные ограниченные меры на G, перестановочные относительно свертывания и такие, что носитель K меры μ_1 компактен и содержит e. Положим $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Пусть V — симметричная компактная окрестность элемента e, содержащая K, а g — функция, равная $\mu * \varphi_V$ на $\complement V$ и 0 на V; показать, что функция $\mu * (g - (\mu_1 * \varphi_V))$ локально почти всюду $\geqslant 0$ на $\complement(V^2)$. С другой стороны, показать, что существует такое компактное множество H, что функция $\mu_2 * \varphi_H$ почти всюду $\geqslant 0$ на V^2.

d) Вывести из c), что если μ — ограниченная положительная мера на G с носителем, содержащим по крайней мере две различные точки, то существует функция f, принадлежащая всем $L^p(G, \beta)$

($1 \leqslant p \leqslant +\infty$), не эквивалентная функции $\geqslant 0$ и такая, что $\mu * f$ будет локально почти всюду $\geqslant 0$, если принять дополнительно одно из следующих предположений: α) G коммутативна; β) в G имеется такая точка a, что $\mu(\{a\}) > 0$. [Разбить надлежащим образом μ на сумму двух перестановочных мер $\geqslant 0$.]

*19) Сохраним обозначения и соглашения упражнения 15.

a) Показать, что если положительная ограниченная мера μ на G такова, что для любой функции $f \in L^p(G, \beta)$ (p — заданное, $1 \leqslant p < +\infty$) из того, что $\check{\mu} * f \geqslant 0$ локально почти всюду, следует, что $f \geqslant 0$ локально почти всюду, то можно заключить, что μ есть точечная мера в каждом из следующих случаев: α) G компактна; β) G дискретна; γ) G коммутативна [использовать упражнение 18] *). Для $p = +\infty$ то же заключение справедливо без дополнительного предположения относительно G.

b) Пусть μ — такая положительная ограниченная мера на G, что: 1° $\gamma(\mu)$ есть сюръективный эндоморфизм пространства $L^1(G, \beta)$; 2° для любой функции $f \in L^1(G, \beta)$ из того, что $\mu * f \geqslant 0$ локально почти всюду, следует, что $f \geqslant 0$ локально почти всюду. Показать тогда, что μ — точечная мера. [Заметить, что для любой функции $g \in L^\infty(G, \beta)$ из того, что $\check{\mu} * g \geqslant 0$ локально почти всюду, следует, что $g \geqslant 0$ локально почти всюду.]

20) Пусть G — локально компактная группа и β — левая мера Хаара на G.

a) Пусть f — ограниченная числовая функция на G, равномерно непрерывная относительно левой равномерной структуры. Показать, что для любой ограниченной меры μ на G функция $\mu * f$ равномерно непрерывна относительно левой равномерной структуры; кроме того, в обозначениях предложения 19, f есть предел, в топологии равномерной сходимости на G, функций $f_V * f$ по фильтру сечений базиса фильтра $\mathfrak{B}$.

b) Возьмем $G = \mathbf{T}$; указать пример непрерывной функции h на $\mathbf{T}$, которая не имела бы вида $f * g$, где f и g принадлежат $L^2(\mathbf{T}, \beta)$. [Использовать упражнения 19 и 20 § 6 главы IV.]

*21) Пусть G — локально компактная группа, а β — левая мера Хаара на G; канонически отождествим $L^1(G, \beta)$ с подпространством пространства $\mathscr{M}^1(G)$.

a) Пусть, в обозначениях упражнения 11 § 3, A — относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$, а B — подмножество из $L^1(G, \beta)$, относительно компактное в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$. Показать, что сужение на $A \times B$ отображения $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{III}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ непрерывно. [Сначала доказать, что если A и B компактны, то образ

*) Относительно примера, когда μ не точечна и такова, что $\mu * f \geqslant 0$ влечет $f \geqslant 0$, см. Williamson, Proc. Edinb. Math. Soc., 1957, стр. 71—77.

произведения $A \times B$ при этом отображении компактен; использовать упражнение 10 § 3, а также критерий α) упражнения 17 § 5 главы V. Затем, для доказательства того, что $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ непрерывно, использовать упражнение 11 с) § 3.]

b) Пусть $\mathscr{U}_s^\infty(G)$ — множество всех ограниченных числовых функций, равномерно непрерывных на G относительно левой равномерной структуры. Обозначим через $\mathscr{T}_{\mathrm{II}}$ топологию $\sigma(\mathscr{M}^1(G), \mathscr{U}_s^\infty(G))$, а через $\mathscr{M}_{\mathrm{II}}$ — пространство $\mathscr{M}^1(G)$, наделенное топологией $\mathscr{T}_{\mathrm{II}}$. Взяв $G = \mathbf{R}$, построить пример последовательности (μ_n) мер на G, стремящейся к 0 в топологии $\mathscr{T}_{\mathrm{II}}$, и последовательности (f_n) функций из $L^1(G, \beta)$, стремящейся к 0 в топологии $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$ (или, что то же самое, в топологии $\sigma(L^1(G, \beta), L^\infty(G, \beta))$), таких, что последовательность $(\mu_n * f_n)$ не стремится к 0 в топологии $\mathscr{T}_{\mathrm{IV}}$. [Взять $f_n(t) = \sin nt$ на интервале $[0, \pi]$ и $f_n(t) = 0$ в остальных точках.]

c) Пусть A — относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}_{\mathrm{II}}$ и B — подмножество из $L^1(G, \beta)$, относительно компактное в топологии, определяемой нормой $\|f\|_1$. Показать, что сужение на $A \times B$ отображения $(\mu, f) \longmapsto \mu * f$ произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{III}} \times L^1(G, \beta)$ в $L^1(G, \beta)$ (наделенное своей топологией нормированного пространства) непрерывно. [Свести к доказательству того, что при $f \in \mathscr{K}(G)$ отображение $\mu \longmapsto \mu * f$ пространства $\mathscr{M}_{\mathrm{II}}$ в $L^1(G, \beta)$ непрерывно на A. Используя то, что $g * f$ для всех $g \in L^\infty(G, \beta)$ и $f \in \mathscr{K}(G)$ равномерно непрерывна относительно левой равномерной структуры, прежде всего показать, что отображение $\mu \longmapsto \mu * f$ пространства $\mathscr{M}_{\mathrm{II}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ непрерывно. Затем, используя упражнение 20а), свести задачу к доказательству того, что если C — подмножество из $L^1(G, \beta)$, компактное в топологии $\sigma(L^1(G, \beta), L^\infty(G, \beta))$, и $h \in \mathscr{K}(G)$, то отображение $\mu \longmapsto \mu * h$ множества C в $L^1(G, \beta)$, наделенное своей топологией нормированного пространства, непрерывно. При помощи тех же рассуждений, что и в а), показать, что для этого достаточно доказать, что образ множества C при указанном отображении компактен в топологии нормированного пространства. Для этого воспользоваться теоремой Шмульяна, тем, что C сжато (§ 3, упражнение 10), и теоремой Лебега.]

d) Пусть A — относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}_{\mathrm{II}}$, содержащее 0, и B — относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}_{\mathrm{I}}$; показать, что для любого $\nu_0 \in B$ сужение на $A \times B$ отображения $(\mu, \nu) \longmapsto \mu * \nu$ произведения $\mathscr{M}_{\mathrm{II}} \times \mathscr{M}_{\mathrm{I}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{II}}$ непрерывно в точке $(0, \nu_0)$. [Использовать упражнения 20а) и 8с).]

e) Пусть A — ограниченное подмножество из $\mathscr{M}^1(G)$ и f — функция из $L^1(G, \beta)$; показать, что сужение на A отображения $\mu \longmapsto \mu * f$ пространства $\mathscr{M}_{\mathrm{III}}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{IV}}$ непрерывно.

f) Пусть $\mathscr{M}_+^1(G)$ — множество всех ограниченных положительных мер на G. Показать, что подмножество A из $\mathscr{M}_+^1(G)$, компактное

в $\mathcal{T}_{\mathrm{II}}$, компактно и в $\mathcal{T}_{\mathrm{III}}$. [Свести к доказательству того, что A — сжатое множество. Рассуждать от противного, используя то, что для $f \in \mathcal{K}(G)$ образ множества A при отображении $\mu \longmapsto \mu * f$ есть, в силу с), сжатое множество.]

g) Показать, что для $G = \mathbf{R}$ топологии, индуцируемые в $\mathcal{M}^1_+(G)$ топологиями $\mathcal{T}_{\mathrm{II}}$ и $\mathcal{T}_{\mathrm{III}}$, различны.

*22) Сохраним обозначения упражнения 21 § 4 и упражнения 11 § 3.

a) Пусть (μ_n) — последовательность ограниченных мер на G. Предположим, что для любой функции $f \in L^1(G, \beta)$ последовательность $(\mu_n * f)$ сходится к 0 в $\mathcal{M}_{\mathrm{I}}$. Показать, что последовательность норм $(\|\mu_n\|)$ ограничена. [Использовать теорему Банаха — Штейнгауза для семейства отображений $f \longmapsto \mu_n * f$ пространства $L^1(G, \beta)$ в себя, а также упражнение 15.] Вывести отсюда, что последовательность (μ_n) стремится к 0 в $\mathcal{M}_{\mathrm{I}}$. [Использовать упражнение 20.]

b) Пусть (μ_n) — такая последовательность ограниченных мер на G, что последовательность $(\mu_n * f)$ широко сходится к 0 для любой функции $f \in L^1(G, \beta)$; показать, что последовательность (μ_n) широко сходится к 0. [Для каждого компактного подмножества K из G показать, рассуждая как в а), что последовательность $(|\mu_n|(K))$ ограничена.] Указать пример (с $G = \mathbf{Z}$), когда последовательность $(\|\mu_n\|)$ не ограничена.

c) Пусть (μ_n) — такая последовательность ограниченных мер на G, что для любой функции $f \in L^1(G, \beta)$ последовательность $(\mu_n * f)$ сходится к 0 в $\mathcal{M}_{\mathrm{II}}$; показать, что последовательность (μ_n) сходится к 0 в $\mathcal{M}_{\mathrm{II}}$. [Использовать а).]

23) Пусть G — локально компактная группа, β — левая мера Хаара на G, а f и g — *положительные* локально β-интегрируемые функции. Предположим, что f и g свертываемы и одна из этих функций равна нулю на дополнении к счетному объединению компактных множеств. Показать, что $f * g$ локально почти всюду равна полунепрерывной снизу функции. [Использовать предложение 15.]

24) Показать, что неравенства предложений 12 и 15 не могут быть улучшены путем введения в правые части какого-либо постоянного множителя $c < 1$.

25) Пусть G — локально компактная группа, β — левая мера Хаара на G и μ — положительная мера на G. Если A — μ-интегрируемое, а B — борелевское подмножество из G, то функция

$$u\colon s \longmapsto \mu(A \cap sB)$$

β-измерима на G; если при этом B β-интегрируемо, то это верно и для u, и $\int \mu(A \cap sB)d\beta(s) = \mu(A)\beta(B^{-1})$. Построить пример такой меры μ, чтобы $s \longmapsto \mu(A \cap sB)$ не было непрерывным; если μ — мера с базисом β и A μ-интегрируемо, а B — борелевское, то функция $s \longmapsto \mu(A \cap sB)$ непрерывна на G.

*26) Пусть G — локально компактная группа и β — левая мера Хаара на G. Для того чтобы подмножество H из $L^p(G, \beta)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ было относительно компактно (в топологии сходимости в среднем порядка p), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1° H ограничено в $L^p(G; \beta)$; 2° для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество K из G, что $\| f\varphi_{G-K} \|_p \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H$; 3° для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V элемента e в G, что $\| \gamma(s)f - f \|_p \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H$ и любого $s \in H$. [Для доказательства достаточности этих условий заметить, что если $g \in \mathscr{K}(G)$ и L — компактное подмножество из G, то образ множества сужений на L функций из H при отображении $f \longmapsto g * f$ есть равностепенно непрерывное подмножество из $\mathscr{K}(G)$.]

*27) Пусть G — локально компактная группа и β — левая мера Хаара на G. Если G не сводится к e, то $L^1(G, \beta)$ есть алгебра (относительно свертывания), имеющая ненулевые делители нуля. Для получения таких двух ненулевых элементов f и g из $L^1(G, \beta)$, что $f * g = 0$, можно поступить следующим образом:

1° Случай, когда G содержит компактную подгруппу H, не сводящуюся к e. Берем тогда в качестве f характеристическую функцию множества A, а в качестве g — разность $\varphi_{sB} - \varphi_B$ двух характеристических функций множества с надлежаще выбранными A и B.

2° Случай, когда $G = \mathbf{Z}$. Показать, что тогда можно взять

$$f(n) = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

для всех $n \in \mathbf{Z}$ и $g(n) = f(-n)$.

3° Общий случай. Прежде всего доказать, что в G существует такое $a \neq e$, что $\Delta(a) = 1$. Тогда замыкание H в G подгруппы, порожденной элементом a, есть компактная подгруппа или подгруппа, изоморфная $\mathbf{Z}$ (Общ. топ., гл. V, § 1, упражнение 2). В первом случае использовать результат пункта 1°, во втором взять

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \varphi_{Ua^{-n}}(t), \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n \varphi_{a^n U}(t),$$

выбрав надлежащим образом U и последовательности (α_n), (β_n) при помощи 2°.

*28) Пусть G_1 и G_2 — локально компактные группы, β_1 и β_2 — левые меры Хаара на G_1 и G_2 и A_1 (соотв. A_2) — топологическая алгебра (над $\mathbf{R}$) $L^1(G_1, \beta_1)$ (соотв. $L^1(G_2, \beta_2)$). Пусть, далее, T — такой алгебраический изоморфизм A_1 на A_2, что отношение «$f \geqslant 0$ почти всюду» эквивалентно отношению «$T(f) \geqslant 1$ почти всюду».

a) Показать, что T — изоморфизм топологических алгебр. [Заметить сначала, что если убывающая последовательность (f_n) элементов из A_1 сходится к 0 почти всюду, то это верно и для последовательности элементов $T(f_n)$; отсюда вывести, что $T(\sup(f_n)) = \sup(T(f_n))$ для любой

ограниченной последовательности (f_n) в A_1, и в заключение применить лемму Фату.]

b) Показать, что T единственным образом продолжается до изоморфизма топологической алгебры $\mathscr{M}^1(G_1)$ на топологическую алгебру $\mathscr{M}^1(G_2)$ и что существуют топологический изоморфизм u группы G_1 на G_2 и непрерывный гомоморфизм χ группы G в $\mathbf{R}_+^*$ такие, что $T(\varepsilon_s) = \chi(s)\varepsilon_{u(s)}$. [Использовать упражнения 15a) и 19b); для доказательства того, что u и χ непрерывны, заметить, что T определяет изоморфизм алгебры $\mathscr{L}(A_1)$ непрерывных эндоморфизмов топологического векторного пространства A_1 на аналогичную алгебру $\mathscr{L}(A_2)$ и этот изоморфизм взаимно непрерывен в топологии простой сходимости; с другой стороны, заметить, что $s \mapsto \delta(s^{-1})$ есть изоморфизм группы G на мультипликативную подгруппу алгебры $\mathscr{L}(A_1)$.]

c) Вывести из b), что

$$(T(f))(t) = \chi(u^{-1}(t))\, f(u^{-1}(t))$$

для любых $f \in A_1$ и $t \in G_2$.

Напомним (Алг., гл. III, 3-е изд., § 1), что имеются неизоморфные конечные группы G_1 и G_2, для которых алгебры $L^1(G_1, \beta_1)$ и $L^1(G_2, \beta_2)$ изоморфны.

§ 5. Пространство замкнутых подгрупп

В этом параграфе G означает локально компактную группу, а μ — правую меру Хаара на G.

1. Пространство мер Хаара замкнутых подгрупп группы G

Лемма 1. *Пусть α — ненулевая положительная мера на G и S — ее носитель; следующие два условия равносильны:*

a) *S есть замкнутая подгруппа группы G, и мера, индуцированная на S мерой α, есть правая мера Хаара на S.*

b) *$\delta(s)\alpha = \alpha$ для всех $s \in S$.*

Кроме того, когда эти условия выполнены, множество тех $t \in G$, для которых $\delta(t)\alpha = \alpha$, равно S.

Ясно, что a) влечет b); обратно, соотношение b) влечет $Sx = S$ для всех $x \in S$; иными словами, отношения $x \in S$ и $y \in S$ влекут $y \in Sx$ или, еще, $yx^{-1} \in S$, а так как S не пусто, то S есть замкнутая подгруппа группы G. Тогда множество тех $t \in G$, для которых $St = S$, есть само S, откуда и вытекает последнее утверждение.

В остальной части этого параграфа мы будем обозначать через Γ множество всех ненулевых положительных мер на G,

удовлетворяющих условиям леммы 1, *и для любого* $\alpha \in \Gamma$ *через* H_α *будем обозначать замкнутую подгруппу группы* G, *служащую носителем меры* α.

Предложение 1. *Множество* Γ *замкнуто в пространстве* $\mathscr{M}_+(G) - \{0\}$, *наделенном широкой топологией.*

Сначала докажем следующие леммы:

Лемма 2. *Пусть* X — *локально компактное пространство и для любой меры* $\alpha \in \mathscr{M}_+(X) - \{0\}$ *через* S_α *обозначен ее носитель. Пусть, далее,* Φ — *фильтр в* $\mathscr{M}_+(G) - \{0\}$, *широко сходящийся к мере* $\alpha_0 \neq 0$. *Тогда для любой окрестности* V *всякой точки* s *носителя меры* α_0 *существует такое множество* $M \in \Phi$, *что* $V \cap S_\alpha \neq \varnothing$ *при любом* $\alpha \in M$.

В самом деле, если $\varphi \in \mathscr{K}_+(X)$ — функция с носителем, содержащимся в V, и такая, что $\int \varphi(x)\, d\alpha_0(x) > 0$, то, по определению, существует такое множество $M \in \Phi$, что $\int \varphi(x)\, d\alpha(x) > 0$ для всех $\alpha \in M$, откуда и следует, что $V \cap S_\alpha \neq \varnothing$.

Лемма 3. *Пусть* E — *множество, фильтрующееся по фильтру* Φ, *и* $\xi \mapsto \alpha(\xi)$ *есть отображение* E *в* Γ, *широко сходящееся по* Φ *к некоторой мере* $\alpha_0 \neq 0$. *С другой стороны, пусть* $\xi \mapsto t_\xi$ *есть такое отображение* E *в* G, *что* $t_\xi \in H_{\alpha(\xi)}$ *для любого* $\xi \in E$. *Если* s — *предельная точка отображения* $\xi \mapsto t_\xi$ *по* Φ, *то* $\delta(s)\alpha_0 = \alpha_0$.

Можно предполагать, заменяя в случае надобности Φ более сильным фильтром, что s — предел отображения $\xi \mapsto t_\xi$ по Φ; на основании леммы 1, $\delta(t_\xi)\alpha(\xi) = \alpha(\xi)$ для всех $\xi \in E$, и справедливость леммы вытекает из непрерывности отображения $(u, \lambda) \mapsto \delta(u)\lambda$ на $G \times \mathscr{M}_+(G)$ (§ 3, предложение 13).

Для доказательства предложения 1 достаточно, в силу леммы 1, показать, что если фильтр Ψ в Γ широко сходится к мере $\alpha_0 \neq 0$ и s принадлежит носителю меры α_0, то $\delta(s)\alpha_0 = \alpha_0$. Но, в силу леммы 2, для любой окрестности V элемента s в G существует такое $M \in \Psi$, что $V \cap H_\alpha \neq \varnothing$ для всякого $\alpha \in M$. Тогда пусть $t_{V,\alpha}$ для любой окрестности V элемента s и любого $\alpha \in \Gamma$ есть некоторая точка из $V \cap H_\alpha$, если $V \cap H_\alpha \neq \varnothing$, и какая-либо

произвольная точка из H_α в противном случае; пусть, далее, Θ — фильтр сечений фильтра окрестностей точки s и Φ — фильтр-произведение $\Theta \times \Psi$; на основании предыдущего, s есть предельная точка отображения $(V, \alpha) \mapsto t_{V,\alpha}$ по Φ. А поскольку, с другой стороны, отображение $(V, \alpha) \mapsto \alpha$ имеет предел по Φ, равный α_0, то предложение вытекает из леммы 3.

Предложение 2. *Пусть φ — функция из $\mathcal{K}_+(G)$, у которой $\varphi(e) > 0$. Тогда множество Γ_φ тех мер $\alpha \in \Gamma$, для которых $\int \varphi(x) d\alpha(x) = 1$, компактно в широкой топологии.*

Множество Γ_φ есть пересечение множества Γ с гиперплоскостью из $\mathcal{M}(G)$, образованной теми α, для которых $\int \varphi(x) d\alpha(x) = 1$; так как эта гиперплоскость широко замкнута в $\mathcal{M}(G)$ и не содержит 0, то из предложения 1 следует, что Γ_φ широко замкнуто в $\mathcal{M}(G)$. Поэтому достаточно показать, что $\sup\limits_{\alpha \in \Gamma_\varphi} \alpha(K) < +\infty$ для любого компактного подмножества K из G (гл. III, § 2, предложение 9). Итак, пусть U — открытая окрестность элемента e в G, определяемая неравенством $\varphi(x) > \varphi(e)/2$; так как $1 = \int \varphi(x) d\alpha(x) \geqslant \geqslant \int_U \varphi(x) d\alpha(x)$ для всех $\alpha \in \Gamma_\varphi$, то видим, что $\alpha(U) \leqslant c = 2/\varphi(e)$ для всех $\alpha \in \Gamma_\varphi$. Пусть V — такая симметричная открытая окрестность элемента e в G, что $V^2 \subset U$; покажем, что $\alpha(Vx) \leqslant c$ для всех $x \in G$ и $\alpha \in \Gamma_\varphi$. Действительно, это неравенство тривиально, если Vx не пересекается с носителем H_α меры α; если же, напротив, существует $h \in Vx \cap H_\alpha$, то $h = vx$ для некоторого $v \in V$, откуда

$$Vx = Vv^{-1}h \subset V^2h \subset Uh,$$

и так как $\delta(h)\alpha = \alpha$, то получаем $\alpha(Vx) \leqslant \alpha(Uh) = \alpha(U) \leqslant c$. Пусть тогда $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — такая последовательность точек из K, что Vx_i составляют покрытие K; из предыдущего следует, что $\alpha(K) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha(Vx_i) \leqslant nc$ для всех $\alpha \in \Gamma_\varphi$, что и требовалось.

Предложение 3. *При условиях предложения 2, отображение $\alpha \mapsto \left(\langle \varphi, \alpha \rangle, \frac{\alpha}{\langle \varphi, \alpha \rangle}\right)$ есть гомеоморфизм Γ на произведение $\mathbf{R}_+^* \times \Gamma_\varphi$.*

Так как отображение $\alpha \mapsto \langle \varphi, \alpha \rangle$ широко непрерывно, то достаточно заметить, что $\langle \varphi, \alpha \rangle \neq 0$ для любой меры $\alpha \in \Gamma$, поскольку e принадлежит носителю H_α меры α, а $\varphi(e) > 0$.

2. *Полунепрерывность объема однородного пространства*

В этом n° мы для любой меры $\alpha \in \Gamma$ положим

$$Q_\alpha = G/H_\alpha \tag{1}$$

и будем обозначать через π_α каноническое отображение $G \to Q_\alpha$.

Пусть Γ^0 — подмножество из Γ, образованное теми мерами α, для которых подгруппа H_α группы G *унимодулярна*; элементы из Γ^0 характеризуются тем, что $\alpha(f) = \alpha(\check{f})$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(G)$ (всякая функция из $\mathscr{K}(H_\alpha)$ продолжается, по теореме Урысона, до функции из $\mathscr{K}(G)$); отсюда заключаем, что Γ^0 *замкнуто* в Γ. Напомним, что для любого $\alpha \in \Gamma^0$ на Q_α фактормера $\mu_\alpha = \mu/\alpha$ определена и относительно инвариантна относительно G (гл. VII, § 2, теорема 3); напомним также, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(G)$ выполняется равенство

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_{Q_\alpha} d\mu_\alpha(\dot{x}) \int_{H_\alpha} f(xs)\, d\alpha(s), \tag{2}$$

где $\dot{x} = \pi_\alpha(x)$ есть канонический образ точки $x \in G$ в Q_α.

Предложение 4. *Пусть* Γ^0 — *множество тех мер* $\alpha \in \Gamma$, *для которых* H_α *унимодулярна*; *для любого* $\alpha \in \Gamma^0$ *положим* $\mu_\alpha = \mu/\alpha$; *тогда отображение* $\alpha \mapsto \|\mu_\alpha\|$ *множества* Γ^0 *в* $\overline{\mathbf{R}}$ *полунепрерывно снизу в широкой топологии.*

Для любого $\alpha \in \Gamma^0$ и любой функции $f \in \mathscr{K}(G)$ положим

$$f_\alpha(\dot{x}) = \int_{H_\alpha} f(xs)\, d\alpha(s) = (f * \alpha)(x),$$

где свертка взята относительно правой меры Хаара μ и использован тот факт, что $\check{\alpha} = \alpha$ (§ 4, n° 4, формула (11)). Как мы знаем (гл. VII, § 2, предложение 2), отображение $f \mapsto f_\alpha$ пространства $\mathscr{K}_+(G)$ в $\mathscr{K}_+(Q_\alpha)$ *сюръективно*; следовательно, в силу (2), имеем

$$\|\mu_\alpha\| = \sup_{f \in \mathscr{K}_+(G),\, f \neq 0} \mu_\alpha(f_\alpha)/\|f_\alpha\| = \sup_{f \in \mathscr{K}_+(G),\, f \neq 0} \mu(f)/\|f_\alpha\|,$$

где

$$\| f_\alpha \| = \sup_{\dot{x} \in Q_\alpha} | f_\alpha(\dot{x}) | = \sup_{x \in G} | (f * \alpha)(x) |. \tag{3}$$

Для доказательства предложения достаточно будет показать, что при заданном $f \in \mathscr{K}_+(G)$ отображение $\alpha \mapsto \| f_\alpha \|$ широко непрерывно. Итак, пусть K — носитель функции f; функция $f * \alpha$ имеет носитель, содержащийся в KH_α, и правоинвариантна относительно H_α; следовательно,

$$\| f_\alpha \| = \sup_{x \in K} | (f * \alpha)(x) |.$$

Таким образом, справедливость утверждения следует из того, что отображение $\alpha \mapsto f * \alpha$ пространства $\mathscr{M}_+(G)$, наделенного широкой топологией, в $\mathscr{C}(G)$, наделенное топологией компактной сходимости, непрерывно (§ 4, n° 2, замечание 1).

Напомним, что если $\| \mu_\alpha \|$ для некоторой меры $\alpha \in \Gamma^0$ конечно, то G обязательно *унимодулярна* (гл. VII, § 2, следствие 3 теоремы 3).

Предложение 5. *Пусть g — μ-интегрируемая положительная числовая функция и $\Gamma^0(g)$ — множество тех мер $\alpha \in \Gamma^0$, для которых $\int^* g(xs)\, d\alpha(s) \geqslant 1$ при любом $x \in G$. Тогда отображение $\alpha \mapsto \| \mu_\alpha \|$ множества $\Gamma^0(g)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ широко непрерывно.*

Напомним (гл. VII, § 2, предложение 5), что для любой меры $\alpha \in \Gamma^0(g)$ функция

$$g_\alpha(\dot{x}) = \int_{H_\alpha} g(xs)\, d\alpha(s)$$

определена μ_α-почти всюду на Q_α, μ_α-интегрируема и

$$\int_G g(x)\, d\mu(x) = \int_{Q_\alpha} g_\alpha(\dot{x})\, d\mu_\alpha(\dot{x}). \tag{4}$$

На основании предложения 4, достаточно доказать, что на $\Gamma^0(g)$ отображение $\alpha \mapsto \| \mu_\alpha \|$ полунепрерывно *сверху*. Зафиксируем меру $\alpha \in \Gamma^0(g)$, и пусть K — некоторое подмножество из G. На Q_α существует непрерывная функция с компактным носителем, принимающая свои значения в $[0, 1]$ и равная 1 на компактном множестве $\pi_\alpha(K)$; так как отображение $f \mapsto f_\alpha$ пространства $\mathscr{K}_+(G)$ в $\mathscr{K}_+(Q_\alpha)$ сюръективно (гл. VII, § 2, предложение 2), то видим,

что существует такая функция $f \in \mathscr{K}_+(G)$, что

$$(f * \alpha)(x) = \int_G f(xs)\, d\alpha(s) \begin{cases} \leqslant 1 \text{ для каждого } x \in G, \\ = 1 \text{ для каждого } x \in K. \end{cases}$$

Так как $\beta \longmapsto f * \beta$ есть непрерывное отображение $\mathscr{M}_+(G)$, наделенного широкой топологией, в $\mathscr{C}(G)$, наделенное топологией компактной сходимости (§ 4, n° 2, замечание 1), то видим, что для любого $\varepsilon > 0$ множество U_ε тех $\beta \in \Gamma^0(g)$, при которых

$$f_\beta(\dot{x}) = \int_G f(xs)\, d\beta(s) > 1 - \varepsilon \text{ для всех } x \in K,$$

есть открытая окрестность элемента α в $\Gamma^0(g)$; тогда, на основании формулы (2), для любого $\beta \in U_\varepsilon$ имеем

$$\| \mu_\alpha \| \geqslant \int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_{Q_\beta} f_\beta(\dot{x})\, d\mu_\beta(\dot{x}) \geqslant (1-\varepsilon)\, \mu_\beta(\pi_\beta(K)). \quad (5)$$

Задав $\varepsilon > 0$, выберем функцию $h \in \mathscr{K}_+(G)$ так, чтобы

$$\int_G |g(x) - h(x)|\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon,$$

и в качестве K, о котором шла речь выше, возьмем $K = \operatorname{supp}(h)$. Для любого $\beta \in \Gamma^0(g)$ имеем, по условию, $g_\beta(\dot{x}) \geqslant 1$ почти всюду (относительно μ_β) на Q_β, и, следовательно, в силу (4),

$$\mu_\beta(Q_\beta - \pi_\beta(K)) \leqslant \int_{Q_\beta - \pi_\beta(K)} g_\beta(\dot{x})\, d\mu_\beta(\dot{x}) = \int_{G - KH_\beta} g(x)\, d\mu(x);$$

а так как h обращается в нуль вне K, и тем более вне KH_β, то получаем, что

$$\mu_\beta(Q_\beta - \pi_\beta(K)) \leqslant \int_{G - KH_\beta} |g(x) - h(x)|\, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_G |g(x) - h(x)|\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon;$$

комбинируя этот результат с (5), видим, что

$$\| \mu_\beta \| \leqslant \varepsilon + \| \mu_\alpha \| / (1 - \varepsilon)$$

для всех $\beta \in U_\varepsilon$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть K — компактное подмножество из G, V — симметричная компактная окрестность элемента e в G*

и c — действительное число >0. Сужение отображения $\alpha \mapsto \|\mu_\alpha\|$ на множество тех $\alpha \in \Gamma^0$, для которых $G = KH_\alpha$ и $\alpha(V) \geqslant c$, широко непрерывно.

Действительно, пусть функция $g \in \mathscr{K}_+(G)$ такова, что $g(x) \geqslant 1/c$ для всех $x \in KV$. Для каждого $x \in K$ имеем

$$\int g(xs)\,d\alpha(s) \geqslant \int_V g(xs)\,d\alpha(s) \geqslant 1,$$

где α удовлетворяет сформулированным условиям; а так как, кроме того, $\pi_\alpha(K) = Q_\alpha$, то $\alpha \in \Gamma^0(g)$, и следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть A — μ-интегрируемое подмножество из G. Сужение отображения $\alpha \mapsto \|\mu_\alpha\|$ на множество N_A нормированных мер Хаара всех дискретных подгрупп H группы G, для которых $G = AH$, широко непрерывно.*

Действительно, для всех $a \in A$ и $\alpha \in N_A$ имеем

$$\int \varphi_A(as)\,d\alpha(s) \geqslant \varphi_A(a) = 1,$$

а так как $\pi_\alpha(A) = Q_A$, то $N_A \subset \Gamma^0(\varphi_A)$, и, стало быть, утверждение следствия вытекает из предложения 5.

3. Пространство замкнутых подгрупп группы G

Обозначим через Σ множество всех *замкнутых подгрупп* группы G; отнеся каждой мере $\alpha \in \Gamma$ ее носитель-подгруппу H_α, получим отображение Γ в Σ (называемое каноническим), которое, очевидно, сюръективно и позволяет канонически отождествить Σ с множеством орбит группы всех гомотетий с коэффициентом >0 в Γ. Множество Σ, наделенное фактортопологией широкой топологии в Γ, называется *пространством замкнутых подгрупп* группы G.

Теорема 1. *Пусть G — локально компактная группа. Пространство Σ замкнутых подгрупп группы G компактно. Кроме того, имеют место следующие свойства:*

(I) *Множество Σ^0 всех унимодулярных замкнутых подгрупп группы G замкнуто в Σ (и, значит, компактно).*

(II) *Если G порождается компактной окрестностью элемента e, то множество Σ^0_c тех унимодулярных замкнутых подгрупп H*

группы G, для которых факторпространство G/H компактно, открыто в Σ^0 (и, значит, локально компактно).

(III) *Для всякой относительно компактной открытой окрестности U элемента e в G множество D_U тех дискретных подгрупп H группы G, для которых $H \cap U = \{e\}$, замкнуто в Γ^0 (и, значит, компактно).*

Из предложения 3 вытекает, что Σ гомеоморфно Γ_φ и, стало быть, согласно предложению 2, компактно. Кроме того, в начале n°2 отмечалось, что множество Γ^0 тех мер $\alpha \in \Gamma$, для которых H_α унимодулярна, замкнуто в Γ; а поскольку Γ^0 устойчиво относительно гомотетий с коэффициентом >0, то образ Σ^0 множества Γ^0 в Σ есть замкнутое подмножество пространства Σ, чем и доказано (I).

Свойство (II) будет вытекать из следующего предложения:

Предложение 6. *Предположим, что локально компактная группа G порождается компактной окрестностью элемента e. Тогда множество Γ_c^0 тех мер $\alpha \in \Gamma^0$, для которых G/H_α компактно, открыто в Γ^0, и сужение на Γ_c^0 отображения $\alpha \mapsto \|\mu_\alpha\|$ широко непрерывно.*

В обозначениях предложения 5 для всех $g \in \mathscr{K}_+(G)$ имеем

$$\Gamma^0(g) \subset \Gamma_c^0. \tag{6}$$

Действительно, пусть K — носитель функции g; из того, что $\int g(xs)d\alpha(s) \geqslant 1$ для всех $x \in G$, следует, что $KH_\alpha = G$, причем интеграл, очевидно, равен нулю на дополнении к множеству KH_α, и, значит, $G/H_\alpha = \pi_\alpha(K)$ компактно. Следовательно, при заданной мере $\alpha \in \Gamma_c^0$ достаточно будет определить такую функцию $g \in \mathscr{K}_+(G)$, чтобы $\Gamma^0(g)$ служило окрестностью меры α в Γ^0. Так как G/H_α компактно и каноническое отображение $f \mapsto f_\alpha$ пространства $\mathscr{K}_+(G)$ в $\mathscr{K}_+(G/H_\alpha)$ сюръективно (гл. VII, § 2, n°2, замечание), то существует такая функция $g \in \mathscr{K}_+(G)$, что $\int g(xs)\, d\alpha(s) = 2$ при *всех* $x \in G$. Пусть K есть (компактный) носитель функции g и L — симметричная компактная окрестность элемента e в G, порождающая G; так как отображение $\beta \mapsto g * \beta$ пространства $\mathscr{M}_+(G)$ в $\mathscr{C}(G)$ широко непрерывно (§ 4, n° 2, замечание 1), то

в Γ^0 существует такая окрестность W меры α, что

$$(g * \beta)(x) = \int g(xs)\, d\beta(s) \geqslant 1 \tag{7}$$

для всех $g \in W$ и всех $x \in LK$. Левая часть формулы (7) обращается в нуль вне KH_β, и потому отношение $\beta \in W$ влечет

$$LK \subset KH_\beta,$$

откуда индукцией по n выводим, что $L^n K \subset KH_\beta$ для каждого целого $n > 0$; но так как L порождает G, то, следовательно, $G = KH_\beta$ для любой меры $\beta \in W$, чем доказано, что $W \subset \Gamma^0_c$. С другой стороны, левая часть формулы (7) правоинвариантна относительно H_β, и потому неравенство (7) справедливо также для всех $x \in LKH_\beta = G$; таким образом, $W \subset \Gamma^0(g)$, и предложение доказано.

Наконец, (III) будет вытекать из следующего предложения:

Предложение 7. *Пусть $N \subset \Gamma^0$ есть подпространство нормированных мер Хаара всех дискретных подгрупп группы G, и N_U для любой относительно компактной открытой окрестности U элемента e в G означает подмножество из N, составленное теми α, для которых $H_\alpha \cap U = \{e\}$. Тогда:*

a) *N_U компактно.*

b) *Внутренности множеств N_U в N образуют покрытие множества N, когда U пробегает все относительно компактные открытые окрестности элемента e в G.*

c) *Для того чтобы множество $M \subset N$ было относительно компактно в N, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая относительно компактная открытая окрестность U элемента e в G, что $M \subset N_U$.*

Так как D_U есть образ множества N_U при каноническом непрерывном отображении $\Gamma \to \Sigma$, то утверждение (III) теоремы 1 будет непосредственно следовать из предложения 7a).

Для доказательства предложения 7 заметим, что N_U может быть определено как подмножество в Γ^0, составленное из тех α, для которых одновременно

$$\alpha(\{e\}) \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \alpha(U) \leqslant 1.$$

Но если A компактно (соотв. открыто и относительно компактно) в G, то отображение $\alpha \mapsto \alpha(A)$ пространства $\mathscr{M}_+(G)$ в $\mathbf{R}$ полунепре-

рывно сверху (соотв. снизу) в широкой топологии (гл. IV, § 1, предложение 4 и § 4, n°4, замечание); таким образом, видим, что N_U *замкнуто* в Γ^0. Кроме того, пусть функция $\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$ такова, что $\varphi(e) = 1$ и $\varphi(x) = 0$ на $G - U$; ясно, что $\int \varphi(x) d\alpha(x) = 1$ для любого $\alpha \in N_U$; следовательно, предложение 2 показывает, что N_U — *компактное* множество, чем доказано a). Пусть, с другой стороны, V — такая относительно компактная открытая окрестность элемента e в G, что $\overline{V} \subset U$, и $\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$ имеет носитель, содержащийся в U, и такова, что $\varphi(x) = 1$ на V. Имеем $\alpha(\varphi) = 1$ для всех $\alpha \in N_U$, и, значит, α обладает такой окрестностью W в N, что $\beta(\varphi) < 2$ для всех $\beta \in W$; тогда ясно, что $W \subset N_V$, и, стало быть, N_V есть окрестность N_U. А так как множества N_U покрывают N, то этим доказано b). Наконец, всякое компактное подмножество M из N содержится в конечном объединении множеств N_{U_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и так как $\bigcup\limits_i N_{U_i} \subset N_U$, где $U = \bigcap\limits_i U_i$, то этим доказано c).

Следствие. *Подпространство N пространства Γ^0 локально компактно.*

4. *Случай групп, не имеющих произвольно малых конечных подгрупп*

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная группа, удовлетворяющая следующему условию:*

(L) *Существует окрестность элемента e в G, не содержащая никакой конечной подгруппы из G, не сводящейся к e.*

Тогда имеют место следующие свойства:

(I) *Множество D всех дискретных подгрупп группы G локально замкнуто в Σ (что равносильно утверждению, что оно локально компактно).*

(II) *Для того чтобы замкнутое подмножество A из D было компактно, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность U элемента e в G, что $H \cap U = \{e\}$ для всех подгрупп $H \in A$.*

(III) *Если, кроме того, G порождается компактной окрестностью элемента e, то множество D_c тех дискретных подгрупп H*

группы G, *для которых* G/H *компактно, локально замкнуто в* Σ (*и значит, локально компактно*).

Так как $D_c = D \cap \Sigma_c^0$, то (III) есть следствие свойства (I) и теоремы 1 (II).

Для доказательства свойств (I) и (II) достаточно, в обозначениях предложения 7, доказать следующее:

Предложение 8. *Каноническая биекция* N *на* D *есть гомеоморфизм.*

Но если Γ_d есть множество всех мер Хаара на дискретных подгруппах группы G, то D канонически гомеоморфно пространству орбит группы гомотетий с коэффициентом > 0 в Γ_d (Общ. топ., гл. I, 3-е изд., § 5, предложение 4). Следовательно, достаточно доказать, что каноническое отображение $\alpha \mapsto (\alpha(\{e\}), \alpha/\alpha(\{e\}))$ множества Γ_d на $\mathbf{R}_+^* \times N$ есть гомеоморфизм, что будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 4. *Если группа* G *удовлетворяет условию* (L), *то отображение* $\alpha \mapsto \alpha(\{e\})$ *множества* Γ_d *в* $\mathbf{R}_+^*$ *широко непрерывно.*

Рассмотрим меру $\alpha \in \Gamma_d$; пусть V_0 есть такая относительно компактная открытая окрестность элемента e в G, что $H_\alpha \cap V_0 = \{e\}$ и не существует никакой конечной подгруппы группы G, содержащейся в V_0 и не сводящейся к e. Пусть, далее, V — такая симметричная компактная окрестность элемента e, что $V^3 \subset V_0$, и U — такая симметричная окрестность элемента e, что $U^2 \subset V$. Пусть, наконец, φ (соотв. ψ) есть функция из $\mathscr{K}_+(G)$ со значениями в $[0, 1]$ и с носителем, содержащимся в V_0 (соотв. в U), равная 1 на V^3 (соотв. в точке e). Множество W тех мер $\beta \in \Gamma_d$, для которых выполняются неравенства $|\beta(\varphi) - \alpha(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ и $|\beta(\psi) - \alpha(\psi)| \leqslant \varepsilon$, есть окрестность точки α. Мы хотим показать, что если взять ε достаточно малым, то $H_\beta \cap V = \{e\}$ *для всех* $\beta \in W$; отсюда будет следовать, что $\beta(\psi) = \beta(\{e\})$, и, значит, $|\beta(\{e\}) - \alpha(\{e\})| \leqslant \varepsilon$, чем лемма и будет доказана.

Нам достаточно будет показать, что при $\beta \in W$

$$(V^2 - V) \cap H_\beta = \varnothing. \tag{8}$$

Действительно, предположим, что это установлено: тогда для всех x и y из $V \cap H_\beta$ имеем $xy^{-1} \in V^2 \cap H_\beta$; но, в силу (8), это влечет $xy^{-1} \in V \cap H_\beta$; иными словами, $V \cap H_\beta$ есть *подгруппа*

группы G, очевидно, дискретная и компактная, а значит, конечная; но, согласно выбору V_0, отсюда и следует, что $V \cap H_\beta = \{e\}$.

Будем рассуждать от противного и предположим, следовательно, что существует точка $z \in V^2 - V$, принадлежащая H_β; согласно выбору U и V, имеем $\psi(sz^{-1}) + \psi(s) \leqslant \varphi(s)$ для всех $s \in G$, поскольку отношение $z \notin U^2$ влечет $Uz \cap U = \varnothing$. Так как

$$\int \psi(sz^{-1})\, d\beta(s) = \int \psi(s)\, d\beta(s),$$

то отсюда следует, что $2\beta(\psi) \leqslant \beta(\varphi) \leqslant \alpha(\varphi) + \varepsilon$; но мы имеем также

$$\beta(\psi) \geqslant \alpha(\psi) - \varepsilon,$$

и, по построению, $\alpha(\varphi) = \alpha(\psi) = \alpha(\{e\})$. Таким образом, взяв $\varepsilon < \alpha(\{e\})/3$, придем к противоречию, что и завершает доказательство.

Образно выражаясь, говорят, что группа G, удовлетворяющая условию (L), *не имеет произвольно малых конечных подгрупп*. °Можно показать, что всякая группа Ли удовлетворяет условию (L), но это условие не характеристично для групп Ли; например, и мультипликативная группа целых p-адических чисел, сравнимых с 1 mod p, удовлетворяет условию (L).$_\circ$

5. *Случай коммутативных групп*

Пусть G — локально компактная группа, $N \subset \Gamma^0$ есть подпространство нормированных мер Хаара всех дискретных подгрупп группы G, а N_c — подмножество из N, соответствующее тем дискретным подгруппам H группы G, для которых *G/H компактна*; следовательно, в обозначениях предложения 6 имеем $N_c = N \cap \Gamma_c^0$; и если группа G порождается компактной окрестностью элемента e, то из предложения 6 следует, что *N_c открыто* в N (и, значит, в силу следствия предложения 7, *локально компактно*) и сужение на N_c отображения $\alpha \mapsto \|\mu_\alpha\|$ *широко непрерывно*.

Предложение 9. *Пусть G* — коммутативная *локально компактная группа, порождаемая компактной окрестностью элемен-*

та e. Для того чтобы множество $A \subset N_c$ было относительно компактно в N_c, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующим двум условиям:

(I) *Существует такая открытая окрестность U элемента e в G, что $H_\alpha \cap U = \{e\}$ для всех $\alpha \in A$.*

(II) *Существует такая постоянная k, что $\mu_\alpha(G/H_\alpha) \leqslant k$ для всех $\alpha \in A$.*

Если $A \subset N_c$ относительно компактно в N_c, то оно тем более таково в N, и, значит, необходимость условий (I) и (II) вытекает из предложений 6 и 7 (без предположения, что G коммутативна). Обратно, предположим, что $A \subset N_c$ удовлетворяет этим условиям; замыкание $\overline{A}$ множества A *в* N, в силу предложения 7, компактно; кроме того, так как $\alpha \mapsto \|\mu_\alpha\|$ полунепрерывно снизу на Γ^0 в широкой топологии (предложение 4), то условие (II) влечет, что неравенство $\|\mu_\alpha\| \leqslant k$ имеет место также для всех $\alpha \in \overline{A}$. Но поскольку G коммутативна, $\mu_\alpha = \mu/\alpha$ есть мера Хаара на группе G/H_α, и, следовательно, G/H_α компактна для всех $\alpha \in \overline{A}$ (гл. VII, § 1, предложение 2). Это означает, что $\overline{A} \subset N_c$, и, значит, A относительно компактно в N_c.

Следствие. *Пусть G — коммутативная локально компактная группа, порождаемая компактной окрестностью элемента e и удовлетворяющая условию* (L) n° 4. *Пусть, далее, D_c — множество тех дискретных подгрупп H группы G, для которых G/H компактна, и $v(H)$ для любого $H \in D_c$ означает общую массу $\mu_\alpha(G/H)$, где μ_α — фактормера меры μ по нормированной мере Хаара α подгруппы H. Для того чтобы множество $A \subset D_c$ было относительно компактно в D_c, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующим двум условиям:*

(I) *Существует такая открытая окрестность U элемента e в G, что $H \cap U = \{e\}$ для всех $H \in A$.*

(II) *Существует такая постоянная k, что $v(H) \leqslant k$ для всех $H \in A$.*

Принимая во внимание предложение 9, это непосредственно следует из того, что D_c есть образ множества N_c при канонической биекции N на D, а эта биекция при сделанных предположениях является гомеоморфизмом (предложение 8).

Пример. Возьмем $G = \mathbf{R}^n$, а в качестве μ — меру Лебега; тогда все условия следствия предложения 9 выполнены. Дискретные подгруппы H группы G, для которых G/H компактна, суть не что иное, как дискретные подгруппы *ранга* n (Общ. топ., гл. VII, § 1, теорема 1); такая подгруппа H порождается базисом $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ пространства $\mathbf{R}^n$, и мы имеем

$$v(H) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

(где определитель взят относительно канонического базиса пространства $\mathbf{R}^n$) (гл. VII, § 2, теорема 4). Здесь пространство D_c может быть интерпретировано следующим образом: всякая подгруппа $H \in D_c$ есть образ $g \cdot \mathbf{Z}^n$ подгруппы $\mathbf{Z}^n$ при некотором преобразовании $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, а подгруппа группы $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, оставляющая устойчивым $\mathbf{Z}^n$, отождествима с $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$. Следовательно, D_c канонически отождествимо, как (не топологическое) однородное пространство, с $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})/\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$. С другой стороны, $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ действует непрерывно в $\mathbf{R}^n$, а значит, также в $\mathscr{M}_+(\mathbf{R}^n)$, наделенном широкой топологией (§ 3, предложение 13), и, следовательно, в подпространстве N_c пространства $\mathscr{M}_+(\mathbf{R}^n)$; при этом канонический гомеоморфизм (предложение 8) N_c на D_c согласуется с операторами из $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$. Так как $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ счетно в бесконечности, а D_c локально компактно, то определенная выше биекция $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})/\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$ на D_c есть *гомеоморфизм* (гл. VII, Приложение 1, лемма 2). Таким образом, следствие предложения 9 дает критерий компактности в однородном пространстве $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})/\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$.

6. Другое истолкование топологии пространства замкнутых подгрупп

Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех замкнутых подмножеств из G; определим в $\mathfrak{F}$ *отделимую равномерную структуру* следующим образом: для любого компактного подмножества K из G и любой окрестности V элемента e в G обозначим через $P(K, V)$ множество всех пар (X, Y) элементов из $\mathfrak{F}$, для которых одновременно

$$X \cap K \subset VY \text{ и } Y \cap K \subset VX. \qquad (9)$$

Покажем, что множества $P(K, V)$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой отделимой равномерной структу-

ры $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{F}$. Аксиомы (U'_I) и (U'_{II}) из Общ. топ., гл. II, 3-е изд., § 1, n° 1, очевидно, выполнены; кроме того, так как отношения $K \subset K'$ и $V' \subset V$ влекут $P(K', V') \subset P(K, V)$, то при проверке выполнения аксиомы (U'_{III}) можно ограничиться тем случаем, когда V — симметричная компактная окрестность элемента e, так что VK компактно. Предположим, что $(X, Y) \in P(VK, V)$ и $(Y, Z) \in P(VK, V)$; тогда $X \cap K \subset X \cap VK \subset VY$, и если $y \in Y$ таково, что $vy \in K$ для некоторого $v \in V$, то необходимо $y \in VK$, и, следовательно,

$$X \cap K \subset V(Y \cap VK);$$

с другой стороны, $Y \cap VK \subset VZ$, откуда $X \cap K \subset V^2Z$, и точно так же показывается, что $Z \cap K \subset V^2X$, чем и доказано (U'_{III}). Наконец, если X и Y — два различных элемента из $\mathfrak{F}$, то существует, например, такая точка $a \in X$, что $a \notin Y$, и, значит, такая симметричная компактная окрестность V элемента e, что $Va \cap Y = \varnothing$ или, еще, $a \notin VY$; тогда тем более $(X, Y) \notin P(Va, V)$, что и завершает доказательство нашего утверждения.

Рассмотрим теперь в множестве Σ всех замкнутых подгрупп группы G топологию $\mathcal{T}$, индуцированную топологией только что определенного равномерного пространства $\mathfrak{F}$. Мы сейчас увидим, что эта топология *совпадает с топологией, определенной в* n° 3. Достаточно будет доказать, что отображение $\alpha \mapsto H_\alpha$ пространства мер Γ в множество Σ, наделенное топологией $\mathcal{T}$, *непрерывно*: действительно, то же будет иметь место для сужения этого отображения на Γ_φ (в обозначениях предложения 2), которое биективно; но так как Γ_φ компактно, а топология $\mathcal{T}$ отделима, то отображение $\alpha \mapsto H_\alpha$ пространства Γ_φ в Σ будет тогда гомеоморфизмом.

Итак, пусть α_0 — точка из Γ, а Φ — фильтр в Γ, сходящийся к α_0; требуется доказать, что H_α стремится к H_{α_0} по Φ в топологии $\mathcal{T}$. Пусть K — компактное подмножество из G и V — симметричная компактная окрестность элемента e в G; для каждого $x \in H_{\alpha_0} \cap K$ существует такое множество $M(x) \in \Phi$, что $Vx \cap H_\alpha \neq \varnothing$ при всех $\alpha \in M(x)$ (лемма 2), откуда $Vx \subset V^2H_\alpha$; покрывая $H_{\alpha_0} \cap K$ конечным числом множеств Vx_i, видим, что $H_{\alpha_0} \cap K \subset V^2H_\alpha$ для всех $\alpha \in M$, где $M = \bigcap_i M(x_i)$. Обратно, предположим, что имеется такая открытая окрестность U

34

элемента e в G, что любое множество $L \in \Phi$ содержит по крайней мере один элемент α, для которого $H_\alpha \cap K \not\subset UH_{\alpha_0}$; пусть $\omega(L)$ — множество всех $\alpha \in L$, обладающих этим свойством; множества $\omega(L)$ образуют в Γ базис фильтра Φ', мажорирующего Φ, и для любого α, принадлежащего объединению E всех множеств $\omega(L)$ $(L \in \Phi)$, существует некоторое $t_\alpha \in H_\alpha \cap K$, не принадлежащее UH_{α_0}; для $\alpha \notin E$ примем за t_α произвольную точку из H_α. Так как $K \cap \complement(UH_{\alpha_0})$ компактно, то существует предельная точка s отображения $\alpha \mapsto t_\alpha$ по Φ', принадлежащая $K \cap \complement(UH_{\alpha_0})$; но так как Φ' сходится к α_0 в Γ, то это противоречит лемме 3.

Упражнения

1) Пусть X — локально компактное пространство и $\mathfrak{F}$ (или $\mathfrak{F}(X)$) — множество всех замкнутых подмножеств из X. Для любого компактного подмножества K из X, любой компактной окрестности L множества K и любого окружения V единственной равномерной структуры в L обозначим через $Q(K, L, V)$ множество всех пар (A, B) элементов из $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих двум условиям

$$A \cap K \subset V(B \cap L) \quad \text{и} \quad B \cap K \subset V(A \cap L).$$

a) Показать, что множества $Q(K, L, V)$ образуют фундаментальную систему окружений отделимой равномерной структуры в $\mathfrak{F}$.

b) Пусть $\mathcal{U}$ — равномерная структура, согласующаяся с топологией пространства X, и $P(K, W)$ для любого компактного подмножества K из X и любого окружения W равномерной структуры $\mathcal{U}$ означает множество всех пар (A, B) элементов из $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих двум условиям:

$$A \cap K \subset W(B) \quad \text{и} \quad B \cap K \subset W(A).$$

Показать, что множества $P(K, W)$ образуют фундаментальную систему окружений для равномерной структуры, определенной в a).

c) Пусть X' — компактификация Александрова пространства X и ω — ее бесконечно удаленная точка; для каждого замкнутого подмножества A из X положим $A' = A \cup \{\omega\}$. Показать, что отображение $A \mapsto A'$ есть изоморфизм равномерного пространства $\mathfrak{F}(X)$, определенного в a), на подпространство пространства $\mathfrak{F}(X')$, образованное всеми замкнутыми подмножествами, содержащими ω. [Использовать b).] Вывести отсюда, что $\mathfrak{F}(X)$ компактно. [См. Общ. топ., гл. II, 3-е изд., § 4, упражнение 15.]

2) Пусть G — локально компактная группа и $\mathfrak{F}(G)$ — равномерное пространство всех замкнутых подмножеств из G (определенное в n° 6 или в упражнении 1). Доказать непосредственно, что множе-

ство Σ всех замкнутых подгрупп группы G замкнуто в $\mathfrak{F}(G)$ (не пользуясь предложением 3).

3) Пусть G — локально компактная группа и χ — непрерывное представление G в $\mathbf{R}_+^*$. Обобщить предложения 4, 5 и 6 на множество Γ_χ тех мер $\alpha \in \Gamma$, для которых сужение χ на H_α имеет тот же модуль, что α. [Заменить меру μ мерой $\chi \cdot \mu$ и рассмотреть фактормеры $(\chi \cdot \mu)/\check{\alpha}$.]

4) Пусть G — локально компактная группа, не порождаемая никаким своим компактным подмножеством, и H — такая дискретная подгруппа группы G, что G/H компактна. Показать, что H не может порождаться никаким конечным числом элементов, но нормированная мера Хаара α_0 подгруппы H является точкой прикосновения в Γ^0 множества тех α, для которых $\| \mu_\alpha \| = +\infty$. [Рассмотреть нормированные меры Хаара подгрупп группы H, порожденных конечным числом элементов.]

5) Пусть G — дискретная группа, являющаяся прямой суммой бесконечной последовательности (G_n) подгрупп из двух элементов, и p_n — проекция G на G_n. Положим $H_n = p_n^{-1}(e)$ и обозначим через α_n нормированную меру Хаара на H_n. Показать, что последовательность (α_n) сходится в Γ_c^0 к нормированной мере Хаара μ группы G, но $\| \mu_{\alpha_n} \| = 2$ и $\| \mu_\mu \| = 1$.

6) Пусть G — локально компактная группа, не удовлетворяющая условию (L) n° 4.

a) Показать (в обозначениях n° 4), что каноническая биекция N на D не есть гомеоморфизм. [Пусть $A(W)$ для любой окрестности W элемента e в G означает множество всех конечных подгрупп, $\neq \{e\}$, содержащихся в W; показать, что множества $A(W)$ образуют базис фильтра, сходящегося в D к подгруппе $\{e\}$, но нормированные меры Хаара α_H подгрупп H не сходятся к ε_e.]

b) Показать, что если, кроме того, G метризуема, то существует компактное подмножество B пространства D всех дискретных подгрупп группы G, не содержащееся ни в каком из множеств D_U, определенных в теореме 1.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК
К ГЛАВАМ VII И VIII

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце этого очерка)

У греков понятия длины, площади и объема, по существу, основаны на их *инвариантности* относительно движений: «И совмещающиеся друг с другом (ἐφαρμόζοντα) равны между собой» (Евклид, Элементы, Книга I-«Общие понятия», 7); и именно изобретательное использование этого принципа позволило получить все формулы, дающие площади или объемы классических «фигур» (многоугольников, конических сечений, многогранников, сфер и т. д.), то путем конечных разбиений, то «исчерпыванием» *). Выражаясь современным языком, можно сказать, что греческие математики доказали существование аддитивных «функций множеств», инвариантных относительно движений, но определенных только для множеств весьма частного вида. Интегральное исчисление может рассматриваться как ответ на потребность расширения области определения этих функций множества и, от Кавальери до Лебега, именно эта задача будет стоять на первом плане исследований аналитиков; свойство же инвариантности относительно движений отходит на второй план, обратившись в тривиальное следствие общей формулы замены переменных в двойных или тройных интегралах и того, что ортогональное преобразование имеет определитель, равный ± 1. Даже в неевкли-

*) Можно показать, что если два плоских многоугольника P и P' имеют одинаковую площадь, то найдутся два многоугольника $R \supset P$, $R' \supset P'$, каждый из которых может быть разбит на конечное число таких многоугольников R_i (соотв. R'_i) $(1 \leqslant i \leqslant m)$ без общих внутренних точек, что R_i и R'_i получаются друг из друга движением (зависящим от i), причем R (соотв. R') является объединением конечного семейства многоугольников S_j (соотв. S'_j) $(0 \leqslant j \leqslant n)$ без общих внутренних точек, где $S_0 = P$, $S'_0 = P'$, а S'_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ получается из S_j движением. Напротив, М. Ден доказал (Ueber den Rauminhalt, Math. Ann., т. LV (1902), стр. 465—478), что это свойство уже не имеет места для объемов многогранников и, следовательно, процессы исчерпывания, применявшиеся начиная с Эвдокса, были неизбежны.

довых геометриях (где группа движений уже другая) точка зрения остается той же; Риман общим образом определяет бесконечно малые элементы площади или объема (или их аналогов для размерностей $\geqslant 3$), исходя из ds^2 при помощи классических евклидовых формул, и потому их инвариантность относительно преобразований, оставляющих инвариантным ds^2, является почти тавтологией.

Только к 1890 году, в связи с развитием, особенно А. Пуанкаре и Э. Картаном, теории *интегральных инвариантов*, появляются другие, менее непосредственные расширения понятия меры, инвариантной относительно группы; А. Пуанкаре рассматривает только однопараметрические группы, действующие в некоторой части пространства, тогда как Э. Картан особенно интересуется группами движений, но действующими в иных пространствах, чем те, в которых они определены. Так, например, он определяет среди прочих (II) инвариантную (относительно группы движений) меру в пространстве всех прямых из $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$ *); кроме того, он указывает, что, вообще, интегральные инварианты для групп Ли представляют собой не что иное, как специальные дифференциальные инварианты, и что поэтому все их можно определить методами Ли. Однако, по-видимому, до фундаментальной работы Гурвица 1897 года (V) не было попыток ни рассматривать, ни применять инвариантную меру на самой группе. Стараясь построить полиномы (над $\mathbf{R}^n$), инвариантные относительно ортогональной группы, Гурвиц исходит из того замечания, что для конечной группы линейных преобразований задача решается сразу взятием *среднего* преобразований $s \cdot P$ произвольного полинома P всеми элементами s группы; это наводит его на мысль заменить для ортогональной группы среднее интегралом относительно инвариантной меры; он дает в явном виде выражение этого последнего при помощи параметрического представления эйлеровыми углами, однако тут же замечает (независимо от Э. Картана), что методы Ли доставляют существование инвариантной меры для любой группы Ли. Быть может, упадок теории инвариантов в начале XX века послужил причиной того, что идеи Гурвица почти не получили немедленного отклика и были взяты на вооружение лишь начиная с 1924 года в связи с распространением И. Шуром и Г. Вейлем на компактные группы Ли классической теории Фробениуса линейных представлений конечных групп. Первый из них ограничивается случаем ортогональной группы и показывает, как метод Гурвица позволяет распространить классические соотношения ортогональности характеров; эту идею Г. Вейль сочетает с работами Э. Картана о полупростых алгебрах Ли для получения явного выражения характеров неприводимых представлений компактных групп Ли и теоремы о полной неприводимости (XIa), а затем, при помощи смелого расширения понятия «регулярного представления», знаменитой теоремы Петера — Вейля, представляющей собой полный аналог разложения регулярного представления на неприводимые составляющие в теории конечных групп (XIb).

*) Инвариантная мера на пространстве прямых в плоскости была уже, по существу, определена в связи с задачами «геометрических вероятностей», а именно Крофтоном, работ которого Картан, вероятно, в это время не знал.

Годом раньше О. Шрейер заложил фундамент общей теории топологических групп, и с этого момента стало ясно, что рассуждения мемуара Петера — Вейля остаются справедливыми в том же виде для всякой топологической группы, на которой можно определить «инвариантную меру». Строго говоря, общие понятия относительно топологии и меры в то время еще только формировались, и ни категория топологических групп, на которых можно было надеяться определить инвариантную меру, ни множества, для которых эта мера была бы определена, не представлялись ясно очерченными. Единственно очевидным было то, что нет надежды распространить на общий случай инфинитезимальные методы, доказывающие существование инвариантной меры на группе Ли. Но другое направление идей, исходящее из работ по мере Лебега, вело как раз к более прямым методам подхода к задаче. В 1914 году Хаусдорф доказал, что не существует не равной тождественно нулю аддитивной функции множества, определенной для *всех* подмножеств из $\mathbf{R}^3$ и инвариантной относительно движений, и естественно было исследовать, остается ли это верным также для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2$, — задача, блестяще решенная в 1923 году С. Банахом, показавшим, что, напротив, как раз в этих двух случаях такая мера существует (I); его метод, весьма остроумный, опирается уже на построение посредством трансфинитной индукции и рассмотрение «средних» $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x+\alpha_k)$ от переносов функции элементами группы *). Аналогичные идеи позволили А. Хаару сделать в 1933 году (IV) решающий шаг и доказать существование инвариантной меры для локально компактных групп со счетным базисом открытых множеств: руководствуясь методом приближения объема в классическом интегральном исчислении при помощи прикладывания конгруэнтных кубов с произвольно малым ребром, он получает при помощи диагонального процесса инвариантную меру как предел последовательности «приближенных мер» — способ, по существу, тот же, которым мы пользовались в § 1 главы VII. Это открытие получило очень большой отзвук, в частности, потому, что оно сразу же позволило Д. фон Нейману решить для компактных групп знаменитую «5-ю проблему» Гильберта о характеризации групп Ли чисто топологическими свойствами (без всякой заранее заданной дифференциальной структуры). Однако сразу же было замечено, что для того, чтобы иметь возможность эффективно использовать инвариантную меру, необходимо знать не только, что она существует, но и то, что она единственна с точностью до множителя; это было сначала доказано Д. фон Нейманом для компактных групп путем использования метода определения меры Хаара «средними» непрерывных функций, аналогичными «средним» Банаха (VIIa); затем Д. фон Нейман (VIIb) и А. Вейль (X) различными методами получили одновременно единственность для случая локально

*) Д. фон Нейман показал в 1929 году, что истинную причину различия в поведении $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2$, с одной стороны, и $\mathbf{R}^n$ для $n \geqslant 3$, — с другой, следует искать в коммутативности группы вращений пространства $\mathbf{R}^2$.

компактных групп, причем А. Вейль в то же время указал, как можно распространить способ Хаара на общие локально компактные группы. А. Вейль (*там же*) получил также условие существования относительно инвариантной меры на однородном пространстве и, наконец, показал, что существование «меры» (наделенной разумными свойствами) на отделимой топологической группе автоматически влечет, что группа локально предкомпактна. Эти работы, по существу, завершали общую теорию меры Хаара; единственное более новое добавление, которое следует отметить,— это понятие квазиинвариантной меры, появившееся лишь около 1950 года в связи с теорией представлений локально компактных групп в гильбертовых пространствах.

История свертки более сложна. Еще в начале XIX века было замечено, что если, например, $F(x, t)$ есть интеграл некоторого линейного уравнения в частных производных от x и t с постоянными коэффициентами, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x-s, t) f(s)\, ds$$

также является интегралом того же уравнения; наряду с другими авторами Пуассон еще до 1820 года использует эту идею, чтобы записать интегралы уравнения теплопроводности в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) f(s)\, ds. \qquad (1)$$

Несколько позже выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}} f(t)\, dt \qquad (2)$$

частичной суммы ряда Фурье и произведенное Дирихле исследование предела этого интеграла при n, стремящемся к $+\infty$, дают первый пример «регуляризации» $f \longmapsto \rho_n * f$ на торе $\mathbf{T}$ (строго говоря, при помощи последовательности неположительных «ядер» ρ_n, что значительно усложняет исследование); аналогичные интегральные выражения под наименованием «сингулярных интегралов» привлекают внимание аналитиков конца XIX и начала XX века, от П. Дюбуа-Реймона до А. Лебега. На $\mathbf{R}$ Вейерштрасс использует интеграл (1) для доказательства своей теоремы аппроксимации многочленами и устанавливает в связи с этим общий принцип регуляризации при помощи последовательности положительных «ядер» ρ_n вида $x \longmapsto c_n\rho(x/n)$. На $\mathbf{T}$ наиболее знаменитый пример регуляризации при помощи положительных ядер был дан несколько позже Фейером, после чего это стало стандартным процессом, положенным в основу большинства «методов суммирования» функциональных рядов.

Однако эти работы, из-за несимметрии ролей, которые играют в них «ядро» и регуляризуемая функция, почти не выявляли алгебраических

свойств свертки. Заслугу обращения внимания на этот пункт следует приписать прежде всего Вольтерра. Он проводит общее исследование «композиции» $F * G$ двух функций от двух переменных

$$(F * G)(x, y) = \int_x^y F(x, t) G(t, y)\, dt,$$

которую он рассматривает как обобщение «переходом от конечного к бесконечному» произведения двух матриц (IX). Он очень скоро выделяет случай (называемый «замкнутым циклом» на основе его истолкования в теории наследственности), где F и G зависят только от $y - x$; тогда то же верно и для $H = F * G$, и если положить $F(x, y) = f(y - x)$, $G(x, y) = g(y - x)$, то

$$H(x, y) = h(y - x),$$

где

$$h(t) = \int_0^t f(t - s)\, g(s)\, ds,$$

так что для $t \geqslant 0$ функция h совпадает со сверткой функций f_1 и g_1, равных соответственно f и g при $t \geqslant 0$ и 0 при $t < 0$.

Однако алгебраический формализм, развитый Вольтерра, не позволял выявить связи со структурой группы в **R** и преобразованием Фурье. Мы не будем излагать здесь историю этого последнего, но следует отметить, что, начиная с Коши, аналитики, обращаясь к интегралу Фурье, старались главным образом найти все более и более широкие условия справедливости различных формул «обращения» и несколько пренебрегали его алгебраическими свойствами. Разумеется, этого нельзя сказать о работах самого Фурье (или работах Лапласа об аналогичном интеграле $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$), но эти преобразования были введены в основном в связи с *линейными* задачами, и потому не так удивительно, что аналитикам долгое время не приходило в голову рассматривать произведения двух преобразований Фурье (исключение составляют произведения тригонометрических или степенных рядов, но связь со сверткой дискретных мер, очевидно, не могла быть замечена в XIX веке). Первое упоминание этого произведения и свертки на **R** содержится, по-видимому, в мемуаре Чебышева (VIII) в связи с вопросами исчисления вероятностей. В самом деле, в этой теории свертка $\mu * \nu$ двух «законов распределения вероятностей» на **R** (положительных мер с общей массой 1) есть не что иное, как закон распределения вероятностей, получаемый «компонированием» μ и ν (при сложении соответствующих «случайных величин»). Разумеется, у Чебышева стоит вопрос лишь о свертке законов распределения вероятностей, имеющих плотность (относительно меры Лебега), а стало быть, о свертке функций; впрочем, она появляется у него лишь эпизодически, как изредка и у более поздних авторов в период до 1920—1930 годов. В 1920 году П. Даниель в почти не замеченной статье (III) определяет свертку двух

произвольных мер на **R** и преобразование Фурье такой меры и явно указывает, что преобразование Фурье осуществляет переход от свертки к обычному произведению,— формализм, который начиная с 1925 года интенсивно используется вероятностниками, особенно после работ П. Леви. Но фундаментальная важность свертки в теории групп была вполне понята лишь Вейлем в 1927 году; он заметил, что для компактной группы свертка функций играет роль умножения в групповой алгебре конечной группы, что позволило ему определить «регулярное представление»; в то же время им был найден в регуляризации эквивалент единичного элемента групповой алгебры конечной группы. Оставалось произвести синтез всех этих точек зрения, который и был выполнен в книге А. Вейля (X), предшествовавшей дальнейшим обобщениям, каковыми явились, с одной стороны, нормированные алгебры И. Гельфанда, а с другой,— свертка распределений.

Мера Хаара и свертка скоро стали существенным орудием в стремлении к алгебризации, которой так сильно отмечен современный анализ; в последующих книгах будут развиваться многочисленные их приложения. В этих главах изложено только одно из них, относящееся к «вариации» замкнутых подгрупп (и особенно дискретных подгрупп) локально компактной группы. Эта теория (имеющая своим отправным пунктом один геометрико-числовой результат К. Малера), начало которой было положено в 1950 году С. Шаботи, была значительно развита и углублена Макбетом и Сверчковским (VI), основные результаты которых мы воспроизвели.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) S. Banach, Sur le problème de la mesure, Fund. Math., t. IV (1923), стр. 7—33.

(II) E. Cartan, Le principe de dualité et certaines intégrales multiples, de l'espace tangentiel et de l'espace réglé, Bull. Soc. Math. France, t. XXIV (1896), стр. 140—177 (=Oeuvres complètes, t. II_1, стр. 265—302).

(III) P. J. Daniell, Stieltjes—Volterra products, Congr. Intern. des Math., Strasbourg, 1920, стр. 130—136.

(IV) A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math., (2), t. XXXIV (1933), стр. 147—169 (=Gesammelte Arbeiten, стр. 600—622).

(V) A. Hurwitz, Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Gött. Nachr., 1897, стр. 71—90 (=Math. Werke, t. II, стр. 546—564).

(VI) A. M. Macbeath, S. Swierczkowski, Limits of lattices in a compactly generated group, Can. Journ. of Math., t. XII (1960), стр. 427—437.

(VII) J. von Neumann: a) Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Comp. Math., t. I (1934), стр. 106—114 (=Collected Works, t. II, n° 22; русский перевод: УМН 2 (1936), 168—176); b) The uniqueness of Haar's measure, Матем. сб., т. I (XLIII) (1936), стр. 721—734 (=Collected Works, t. IV, n° 6).

(VIII) P. Tchebychef, Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités, Acta Math., t. XIV (1890), стр. 305—315 (=Oeuvres, t. II, стр. 481—491. На русском языке см. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, т. III (1948), стр. 229—239.)

(IX) V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris (Gauthier—Villars), 1913.

(X) A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actual. Scient. et Ind., n° 869, Paris, Hermann, 1940 (2e éd., ibid., n° 869—1145, Paris, Hermann, 1953; русский перевод с первого издания: А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, 1950).

(XI) H. Weyl: a) Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Zeit., t. XXIII (1925), стр. 271—309, XXIV (1926), стр. 328—395 и 789—791 (=Selecta, Basel—Stuttgart (Birkhäuser), 1956, стр. 262—366; частичный русский перевод УМН 4 (1938), 201—246); b) (mit F. Peter) Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., t. XCVII (1927), стр. 737—755 (=Selecta, стр. 387—404; русский перевод: УМН 2 (1936), 144—160).

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВЫ VI

Скалярно существенно интегрируемые функции:

Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве T и f — отображение T в отделимое локально выпуклое пространство F. f называется *скалярно существенно μ-интегрируемым*, если для любого z', принадлежащего сопряженному к F пространству F', функция $\langle z', f\rangle : t \to \langle z', f(t)\rangle$ существенно μ-интегрируема. Тогда $z' \mapsto \int \langle z', f\rangle \, d\mu$ есть линейная форма на F', или, иначе, элемент алгебраического сопряженного F'^* к F', обозначаемый $\int f \, d\mu$ и называемый *интегралом* от f относительно μ.

Векторные меры:

Пусть T — локально компактное пространство и F — отделимое локально выпуклое пространство. *Векторной мерой* на T со значениями в F называется всякое непрерывное линейное отображение $\boldsymbol{m}$ пространства $\mathcal{K}(T)$ в F; непрерывность $\boldsymbol{m}$ означает, что для любого компактного множества $K \subset T$ образ при отображении $\boldsymbol{m}$ единичного шара $\|f\| \leqslant 1$ банахова пространства $\mathcal{K}(T, K)$ есть ограниченное множество в F.

Если $\boldsymbol{m}$ — векторная мера на T со значениями в F, то $z' \circ \boldsymbol{m}$ для любого $z' \in F'$ есть скалярная мера на T. Числовая функция f, определенная на T, называется *существенно интегрируемой* относительно $\boldsymbol{m}$, если она существенно интегрируема относительно меры $|z' \circ \boldsymbol{m}|$ для любого $z' \in F'$. Тогда отображение $z' \mapsto \int f d(z' \circ \boldsymbol{m})^+ - \int f d(z' \circ \boldsymbol{m})^-$ есть линейная форма на F', или, иначе, элемент из F'^*, обозначаемый $\int f \, d\boldsymbol{m}$ и называемый *интегралом* от f относительно $\boldsymbol{m}$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГЛАВЫ VII

Формулы, касающиеся $\gamma(s)$ *и* $\delta(s)$:

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно слева в локально компактном пространстве X по закону $(s, x) \mapsto sx$.

$$\gamma(s)x = sx \qquad (s \in G,\ x \in X),$$

$$\gamma(st) = \gamma(s)\,\gamma(t) \qquad (s,\ t \in G),$$

$$(\gamma(s)\,f)(x) = f(s^{-1}x) \qquad (f \text{ — функция на } X),$$

$$\langle f,\ \gamma(s)\,\mu\rangle = \langle \gamma(s^{-1})\,f,\ \mu\rangle \qquad (\mu \text{ — мера на } X),$$

$$d(\gamma(s)\,\mu)(x) = d\mu(s^{-1}x),$$

$$(\gamma(s)\,\mu)(A) = \mu(s^{-1}A) \qquad (A \text{ есть } \gamma(s)\,\mu\text{-интегрируемое множество}).$$

Если μ — относительно инвариантная мера с мультипликатором χ, то

$$\gamma(s)\,\mu = \chi(s)^{-1}\mu,$$

$$d\mu(sx) = \chi(s)\,d\mu(x).$$

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно справа в локально компактном пространстве X по закону $(s, x) \mapsto xs$.

$$\delta(s)\,x = xs^{-1},$$

$$\delta(st) = \delta(s)\,\delta(t),$$

$$(\delta(s)\,f)(x) = f(xs),$$

$$\langle f,\ \delta(s)\,\mu\rangle = \langle \delta(s^{-1})\,f,\ \mu\rangle,$$

$$d(\delta(s)\,\mu)(x) = d\mu(xs),$$

$$(\delta(s)\,\mu)(A) = \mu(As).$$

Если μ — относительно инвариантная мера с мультипликатором χ', то

$$\delta(s)\,\mu = \chi'(s)\,\mu,$$

$$d\mu(xs) = \chi'(s)\,d\mu(x).$$

Формулы, касающиеся мер Хаара

Пусть G — локально компактная группа, Δ — ее модуль, μ — левая мера Хаара, ν — правая мера Хаара.

1) Имеем

$$\gamma(s)\,\mu = \mu \qquad \delta(s)\,\mu = \Delta(s)\,\mu \qquad \check{\mu} = \Delta^{-1}\cdot\mu$$

$$d\mu(sx) = d\mu(x) \qquad d\mu(xs) = \Delta(s)\,d\mu(x) \qquad d\mu(x^{-1}) = \Delta(x)^{-1}\,d\mu(x).$$

Если f μ-интегрируемо, то

$$\int f(sx)\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x) \qquad \int f(xs)\,d\mu(x) = \Delta(s)^{-1}\int f(x)\,d\mu(x)$$

$$\int f(x^{-1})\,\Delta(x)^{-1}\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x).$$

Если $A \subset G$ μ-интегрируемо, то

$$\mu(sA) = \mu(A) \qquad \mu(As) = \Delta(s)\,\mu(A).$$

2) Имеем

$$\delta(s)\,\nu = \nu \qquad \gamma(s)\,\nu = \Delta(s)\,\nu \qquad \check{\nu} = \Delta\cdot\nu$$

$$d\nu(xs) = d\nu(x) \qquad d\nu(s^{-1}x) = \Delta(s)\,d\nu(x) \qquad d\nu(x^{-1}) = \Delta(x)\,d\nu(x).$$

Если f ν-интегрируемо, то

$$\int f(xs)\,d\nu(x) = \int f(x)\,d\nu(x) \qquad \int f(sx)\,d\nu(x) = \Delta(s)\int f(x)\,d\nu(x)$$

$$\int f(x^{-1})\,\Delta(x)\,d\nu(x) = \int f(x)\,d\nu(x).$$

Если $A \subset G$ ν-интегрируемо, то

$$\nu(As) = \nu(A) \qquad \nu(sA) = \Delta(s^{-1})\,\nu(A).$$

3) ν пропорционально $\Delta^{-1}\cdot\mu$, μ пропорционально $\Delta\cdot\nu$.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СВЕРТКИ

I. Случай существования свертки $\mu * \nu$ двух мер:

(a) $*$ определяется при помощи непрерывного отображения $\varphi\colon X \times Y \to Z$:

μ, ν ограничены (тогда $\mu * \nu$ ограничена и $\| \mu * \nu \| \leqslant \| \mu \| \cdot \| \nu \|$).

μ, ν имеют компактный носитель (тогда $\mu * \nu$ имеет компактный носитель и $\operatorname{supp}(\mu * \nu) \subset \varphi(\operatorname{supp}\mu \times \operatorname{supp}\nu)$).

(b) $*$ определяется при помощи группы, действующей непрерывно слева в пространстве: μ имеет компактный носитель, ν произвольна.

(c) $*$ определяется при помощи умножения в группе G:

одна из двух мер имеет компактный носитель.

μ, $\nu \in M^{\rho}(G)$ (тогда $\mu * \nu \in M^{\rho}(G)$ и $\| \mu * \nu \|_{\rho} \leqslant \| \mu \|_{\rho} \| \nu \|_{\rho}$).

II. Случай существования свертки $\mu * f$ меры и функции:

(a) $*$ определяется при помощи группы G, действующей непрерывно слева в пространстве X, наделенном такой мерой $\beta \geqslant 0$, что $\gamma(s)\beta = \chi(s^{-1}, \cdot)\beta$, где χ непрерывно:

μ имеет компактный носитель, f локально β-интегрируема (если f непрерывна, то $\mu * f$ непрерывна; если f непрерывна и имеет компактный носитель, $\mu * f$ непрерывна и имеет компактный носитель).

G действует совершенно в X, $f \in \mathscr{K}(X)$ ($\mu * f$ непрерывна).

(b) $\chi(s, \cdot)$ ограничены; пусть $\rho(s) = \sup\limits_{x \in X} \chi(s^{-1}, x)$:

$\mu \in M^{\rho}(G)$, $f \in L^{\infty}(X, \beta)$ (тогда $\mu * f \in L^{\infty}(X, \beta)$; если $f \in \mathscr{C}^{\infty}(X)$, $\mu * f \in \mathscr{C}^{\infty}(X)$; если $f \in \overline{\mathscr{K}(X)}$, $\mu * f \in \overline{\mathscr{K}(X)}$).

$\mu \in M^{\rho^{1/q}}(G)$, $f \in L^{p}(X, \beta)$, где $1/p + 1/q = 1$ (тогда $\mu * f \in L^{p}(X, \beta)$ и $\| \mu * f \|_{p} \leqslant \| \mu \|_{\rho^{1/q}} \| f \|_{p}$).

III. Случай существования свертки $f * g$ двух локально β-интегрируемых функций (β — относительно инвариантная мера $\geqslant 0$ на группе G с левым мультипликатором χ и правым χ'):

f или g непрерывна, f или g имеет компактный носитель (тогда $f*g$ непрерывна; если f, $g \in \mathscr{K}(G)$, то $f*g \in \mathscr{K}(G)$).

$f\chi^{-1/q} \in L^1(G, \beta)$ и $g \in L^p(G, \beta)$ $(1/p+1/q=1)$ (тогда $f*g \in L^p(G, \beta)$ и $\| f*g \|_p \leqslant \| f\chi^{-1/q} \|_1 \| g \|_p$).

$f \in L^p(G, \beta)$ и $g\chi'^{-1/q} \in L^1(G, \beta)$ (тогда $f*g \in L^p(G, \beta)$ и $\| f*g \|_p \leqslant \leqslant \| f \|_p \| g\chi'^{-1/q} \|_1$).

$f\chi^{-1} \in L^1(G, \beta)$ и $g \in \mathscr{C}^\infty(G)$ (соотв. $\overline{\mathscr{K}(G)}$) (тогда $f*g \in \mathscr{C}^\infty(G)$ (соотв. $\overline{\mathscr{K}(G)}$)).

$f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ (соотв. $\overline{\mathscr{K}(G)}$) и $g\chi'^{-1} \in L^1(G, \beta)$ (тогда $f*g \in \mathscr{C}^\infty(G)$ (соотв. $\overline{\mathscr{K}(G)}$)).

$f \in L^p(G, \beta)$, $g \in L^q(G, \check{\beta})$, где $1/p+1/q=1$, $1<p<+\infty$, β левоинвариантна (тогда $f*g \in \overline{\mathscr{K}(G)}$ и $\| f*g \|_\infty \leqslant \| f \|_p \| \check{g} \|_q$).

Цена 1 р. 63 к.

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Книга I. Теория множеств
Книга II. Алгебра
Книга III. Общая топология
Книга IV. Функции действительного переменного
Книга V. Топологические векторные пространства
Книга VI. Интегрирование

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Книга (без номера). Группы и алгебры Ли
Книга (без номера). Коммутативная алгебра

БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ВЕКТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ